现代应用数学丛书

变分法及其应用

〔日〕加藤敏夫 著



上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

变分法及其应用

〔日〕加藤敏夫 著
周 怀 生 譯
金 福 临 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分六章，前五章介紹变分学的基础理論，包括变分問題的提出、变分学的基本方程、固有值問題、极值的必要与充分条件和 Hamilton-Jacobi 理論等。最后一章叙述变分法在近似計算中的应用，对于逼留值的近似計算特別是两側估計作了較多的討論。各章之后均附有一定数量的习题。可供高等学校数学系、物理系作为教学用书，也可供工程技术人員、研究工作人員作参考。

現代应用数学丛书

变分法及其应用

原书名　变分法とその応用
原著者　〔日〕加藤敏夫
原出版者　岩波书店
譯者　周怀生
校者　金福临

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

开本 850×1168 1/32　印張 4 4/32　字数 95,000
1961年12月第1版　1961年12月第1次印刷
印数 1—16,000

統一书号：13119·432
定价：（十四）0.72元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

原作者序

变分法是討論极大极小問題的数学分支。有限个变数的极值問題通常是微积分学研究的对象，而变分法所处理的則是函数的函数，即泛函的极值問題。

毫无疑問，极值問題这一課題富有数学的趣味，但作者认为变分法的特点在于它的广泛应用。一方面，通过 Euler 方程的联系，变分法以它与微分方程的关系作为基础，构成了物理学上的种种变分原理。在这个意义下，变分法就成为物理学理論的不可缺少的組成部分。作为其他方面的应用，变分法通过"直接解法"而成为近似計算的有效方法。这种应用比較新颖，它的范圍目前正在不断地扩大。

本书原来打算从变分法的基础理論开始，一直到这些应用为止的各个方面都作介紹，但因篇幅的限制，所以很难說已經使这个意图完全实現。为了增加內容，书中沒有拘泥于数学的严密性，而是力求中肯极要。关于解的存在的証明，原則上不予涉及。所論述的"直接解法"也只限于与近似計算有关的部分。虽然物理学上的很多变分原理是物理学的一部分而沒有加以深入討論，但这当然不是对这一部分有所輕視。原来曾想举极多例子，但因篇幅关系未能如愿。另一方面，关于使极值在实际上成为极小的条件，以及把最大值归結为最小值的相反定理等內容，从应用的观点来看，应认为已作了相当詳細的討論了。

目　　录

第1章 极值問題

由于变分法是处理极大极小等极值問題的一种方法，因此，我們把有关普通函数极值問題的一些基本事項都收集在这一章里，作为研究变分法的准备。現在先叙述一些微分学与綫性代数的知識。

§1 二次整式的极值問題

考虑 n 个实变数 $u_1, \cdots, u_n$ 的二次整式

$$J(\boldsymbol{u}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_iu_k + 2\sum_{i=1}^{n} a_iu_i + a_0, \tag{1.1}$$

这里系数 a_{ik}, a_i, a_0 是实数，而矩陣 (a_{ik}) 是对称的 $(a_{ik}=a_{ki})$。把 $u_1, \cdots, u_n$ 集合起来看作是一个矢量，記为 $\boldsymbol{u}$。

如果 $u_1, \cdots, u_n$ 通过所有实数值而变化时，$J(\boldsymbol{u})$ 有最小值，則給出 $J(\boldsymbol{u})$ 最小值的 $u_1, \cdots, u_n$ 的值，依微分学教程，即作为 n 个方程的方程組

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k + a_i = 0 \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1.2}$$

的解而被給定。若矩陣 (a_{ik}) 的行列式 Δ 的值不为 0，則满足(1.2)的 $u_1, \cdots, u_n$ 存在且唯一确定，但相应的 J 的值就不限定是最小值。可能是最大值，也可能既不是最大值也不是最小值，而是所謂鞍点值。把它們总称为逗留(stationary)值。

今后总是将矩陣 (a_{ik}) 的逆陣記作 (a'_{ik})，它也是对称陣。于是(1.2)的解由下式給出：

$$u_i = \bar{u}_i = -\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}a_k. \tag{1.3}$$

若将此式代入(1.1),立刻就会知道

$$J(\bar{u}) = -\sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} a_i a_k + a_0 \tag{1.4}$$

是 J 的逗留值。称 $\bar{u}$ 为**逗留点**。

为了討論 $J(\bar{u})$ 实际上是否为最小值,記

$$u_i - \bar{u}_i = \delta u_i \quad (i=1, \cdots, n). \tag{1.5}$$

利用 $u_i = \bar{u}_i$ 满足(1.2)这一事实,就有

$$J(u) - J(\bar{u}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \delta u_i \delta u_k, \tag{1.6}$$

所以問題就归結为二次形式(1.6)或矩陣 (a_{ik}) 的性质的討論。要使 $J(\bar{u})$ 成为(狹义的)最小值,其必要而充分的条件是:(1.6)对于任何的"变分" $\delta u_1, \cdots, \delta u_n$ (但 δu_i 不全为 0)都是正的,也就是矩陣 (a_{ik}) 为**正定的**。

同样,要使 $J(\bar{u})$ 成为最大值,其必要而充分的条件是 (a_{ik}) 为负定的。一般,因为 $J(u)$ 的最大值就是 $-J(u)$ 的最小值,所以沒有分别考虑的必要,以下主要只討論最小值。

§2 化成对角型

依綫性代数的理論,任意的二次形式都能經适当的綫性变换化成对角型。就上述情形来讲,施行适当的綫性变换

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} v_k \quad (i=1, \cdots, n), \tag{2.1}$$

就能使(1.1)的二次項中仅出現 v_i^2 形式的項,而成为

$$J(u) = I(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i + a_0. \tag{2.2}$$

如果原来的矩陣 (a_{ik}) 的行列式不为 0, 則 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 也都不为 0. $I(v)$ 的逗留值条件与(1.2)同样就成为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial v_i} = \lambda_i v_i + \mu_i = 0 \quad (i=1, \cdots, n). \tag{2.3}$$

若将它的解 $v_i=\bar{v}_i=-\mu_i/\lambda_i$ 代入(2.2)，則

$$I(\bar{v})=a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{\lambda_i} \tag{2.4}$$

就是逗留值。

因为相当于(1.6)的式子是

$$I(v)-I(\bar{v})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\delta v_i)^2, \tag{2.5}$$

所以，所有的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都为正［負］就是使 $\bar{v}$ 成为最小［大］点的条件，而在其他的情形則成为鞍点。鞍点也可以有各种不同的情形，为了区别它的种类，就要用到**型数**(type number)(也称为指数 index)。所謂型数就是指 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中負数的数目。这样，逗留点能分为型数各为 $0, 1, \cdots, n$ 的类。型数为 0 的逗留点是最小点，型数为 n 的逗留点是最大点。至于鞍点，它共有 $n-1$ 种，其型数分別为 $1, 2, \cdots, (n-1)$。

型数是不变量，而且不依賴于所用的坐标变换(2.1)。用其他的綫性变换把 $J(u)$ 化成(2.2)那样的对角型也是可能的，此时，一般說来 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 也成为不同的数了，但型数仍是不变的。这就是二次形式中被称为**慣性律**的定理。

§3 逗留值的計算

逗留值 $J(\bar{u})$ 虽然由(1.4)給出，但这个式子对于計算来說并不一定方便。在实际計算时，譬如用消去法就要好些。将(1.1)变为

$$\begin{aligned}J(u)=&\frac{1}{a_{11}}(a_{11}u_1+a_{12}u_2+\cdots+a_{1n}u_n+a_1)^2\\&+\sum_{i,k=2}^{n}\left(a_{ik}-\frac{a_{1i}a_{1k}}{a_{11}}\right)u_iu_k+2\sum_{i=2}^{n}\left(a_i-\frac{a_{1i}a_1}{a_{11}}\right)u_i\\&+a_0-\frac{a_1^2}{a_{11}},\end{aligned} \tag{3.1}$$

第一行被表示成一次式的平方的形状，且能写成 $(v_1+a_1)^2/a_{11}$ 的形式。第二行以下不含足标 1. 继續用这个方法，$J(\boldsymbol{u})$就被化成对角型，其結果是

$$J(\boldsymbol{u})=I(\boldsymbol{v})=\frac{1}{a_{11}^{(1)}}(v_1+a_1^{(1)})^2+\frac{1}{a_{22}^{(2)}}(v_2+a_2^{(2)})^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{a_{nn}^{(n)}}(v_n+a_n^{(n)})^2+a_0^{(n)}. \tag{3.2}$$

变数 v_i，系数 $a_{ii}^{(i)}$ 等依下列公式順次計算：

$$\left.\begin{aligned}
&a_{ik}^{(1)}=a_{ik},\quad a_i^{(1)}=a_i,\quad a_0^{(1)}=a_0 \quad (i,k=1,\cdots,n);\\
&a_{ik}^{(r+1)}=a_{ik}^{(r)}-\frac{a_{ir}^{(r)}a_{rk}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}},\quad a_i^{(r+1)}=a_i^{(r)}-\frac{a_{ir}^{(r)}a_r^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}},\\
&a_0^{(r+1)}=a_0^{(r)}-\frac{[a_r^{(r)}]^2}{a_{rr}^{(r)}} \quad (i,k=r,r+1,\cdots,n);\\
&\qquad\qquad (r=1,2,\cdots,n),
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$$v_r=a_{rr}^{(r)}u_r+a_{r,r+1}^{(r)}u_{r+1}+\cdots+a_{rn}^{(r)}u_n. \tag{3.4}$$

从(3.2)立刻知道 J 的逗留点为

$$v_i=\bar{v}_i=-a_i^{(i)} \quad (i=1,\cdots,n), \tag{3.5}$$

而逗留值是

$$J(\bar{\boldsymbol{u}})=a_0^{(n)}. \tag{3.6}$$

为了求出 $\bar{\boldsymbol{u}}$，只要按 $u_n, u_{n-1}, \cdots, u_1$ 的順序来解(3.4)就可以了，即

$$\left.\begin{aligned}
&a_{nn}^{(n)}\bar{u}_n=\bar{v}_n=-a_n^{(n)},\\
&a_{n-1,n-1}^{(n-1)}\bar{u}_{n-1}=-a_{n-1}^{(n-1)}-a_{n-1,n}^{(n-1)}\bar{u}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{11}^{(1)}\bar{u}_1=-a_1^{(1)}-a_{12}^{(1)}\bar{u}_2-\cdots-a_{1n}^{(1)}\bar{u}_n.
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

以上的計算最后是与对矩陣

$$\begin{pmatrix}
a_{11}\cdots\cdots a_{1n}a_1\\
\quad a_{22}\cdots a_{2n}a_2\\
\qquad\ddots\ a_{nn}a_n\\
\qquad\qquad a_0
\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

施用 Gauss 消去法完全相同的。

重要的是 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 从(3.6)立刻可求出，幷不需要經过先求出 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 再把它代入 $J(\boldsymbol{u})$ 式中这一过程。实际上，計算逗留值 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 要比計算逗留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 容易得多。此外，在上述計算中适当地选取足标 $i=1, 2, \cdots, n$ 的排法（換句話說就是消去变数的順序）也是重要的。

§4 矢量記法

上面的問題使用矢量記法就能簡单地表述出来。两个矢量 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$, $\boldsymbol{v}=(v_1, \cdots, v_n)$ 的內积用

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=u_1v_1+\cdots+u_nv_n \tag{4.1}$$

来表示，因此(1.1)能写成

$$J(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})+a_0. \tag{4.2}$$

其中 A 表示矩陣 (a_{ik}). 逗留点的条件(1.2)变为

$$A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}=0. \tag{4.3}$$

这由

$$\begin{aligned} 0=\delta J(\boldsymbol{u}) &= (\delta\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}, A\delta\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{a}, \delta\boldsymbol{u}) \\ &= 2(\delta\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

对于任意的变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 都成立这一事实也会明了。(4.3)的解就是(1.3)，即

$$\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}=-A^{-1}\boldsymbol{a}. \tag{4.5}$$

逗留值(1.4)成为

$$J(\bar{\boldsymbol{u}})=-(\boldsymbol{a}, A^{-1}\boldsymbol{a})+a_0, \tag{4.6}$$

A^{-1} 表示 A 的逆陣。前节所述的計算法总的說来不外乎是計算 $(\boldsymbol{a}, A^{-1}\boldsymbol{a})$ 这样形状的数。前节的結果已說明在求出这个数时，幷无实际作出 A^{-1} 的必要。

§5 固有値問題

在有关二次形式的許多重要問題中,有求与(1.1)不同形式的式子

$$\tilde{J}(\boldsymbol{u})=\frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_iu_k}{\sum\limits_{i,k=1}^{n}b_{ik}u_iu_k}=\frac{(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u},B\boldsymbol{u})} \tag{5.1}$$

的最小値,或者一般的逗留值的問題。設 $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$ 为对称陣,且設 B 为正値的。

(5.1)是关于 $\boldsymbol{u}$ 的0次齐次式。即用任意的数 λ 来乘 $\boldsymbol{u}$, $J(\boldsymbol{u})$ 的值都不变。因此,开始就附以条件

$$\sum b_{ik}u_iu_k=(\boldsymbol{u},B\boldsymbol{u})=1 \tag{5.2}$$

来考虑也无妨碍,于是上面的問題就成为所謂条件逗留值的問題。在几何学中象求椭圓体最小(大)半徑的問題就是它的特殊情形。

照例,逗留条件是

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=0 \quad (i=1,\cdots,n). \tag{5.3}$$

将(5.1)写成

$$\Big(\sum_{i,k}b_{ik}u_iu_k\Big)J(\boldsymbol{u})=\sum_{i,k}a_{ik}u_iu_k, \tag{5.4}$$

对 u_i 微分,并利用(5.3)就能得到作为逗留点 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 的条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}-\lambda b_{ik})u_k=0,\\&\lambda=J(\boldsymbol{u}).\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

这又能写成

$$A\boldsymbol{u}=\lambda B\boldsymbol{u}. \tag{5.6}$$

(5.5)有解的条件是

$$\det(a_{ik}-\lambda b_{ik})=0. \tag{5.7}$$

这里 $\det(a_{ik})$ 表示矩陣 (a_{ik}) 的行列式。

(5.5)或(5.6)就是所謂固有値問題的表达式。固有値 λ 作为 n 次方程(5.7)的根来确定。由于假定 B 是正值矩陣,所以固有值都是实数。这时对于各个固有值 $\lambda=\bar{\lambda}$, 就确定了满足 (5.6) 的实"固有矢量" $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}\neq 0$. 对此因有

$$J(\bar{\boldsymbol{u}})=\bar{\lambda}, \tag{5.8}$$

所以(5.5)的第二式为第一式的当然結果,即固有值 $\bar{\lambda}$ 恰好就是在逗留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 处 J 的逗留值。

此外,还常常将固有矢量在 (5.2) 成立的情况下来加以規范化。

§6 固有值的最大最小性

按照固有值問題的理論,固有值恰好有 n 个,能把它們排列如下:

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n. \tag{6.1}$$

对于各个固有值 λ_i, 有固有矢量 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 与它对应,而能使其满足下式:

$$(\boldsymbol{u}^{(i)}, B\boldsymbol{u}^{(k)})=\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k),\\ 0 & (i\neq k).\end{cases} \tag{6.2}$$

任意的矢量 $\boldsymbol{u}$ 能用 $\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$ 展开如下:

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{u}^{(i)}. \tag{6.3}$$

展开系数 ξ_i 依(6.2)由

$$\xi_i=(\boldsymbol{u}^{(i)}, B\boldsymbol{u}) \tag{6.4}$$

确定。因而有

$$(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})=\sum_i\xi_i^2. \tag{6.5}$$

另一方面,注意到

$$A\boldsymbol{u}^{(i)}=\lambda_i B\boldsymbol{u}^{(i)}, \tag{6.6}$$

利用(6.2),(6.3)能得出

$$(\boldsymbol{u},\ A\boldsymbol{u})=\sum_i \lambda_i \xi_i^2. \tag{6.7}$$

在条件(5.2)下求(5.1)的最小值或一般逗留值的問題，如果利用系数 $\{\xi_i\}$ 来表述的話，就归結为在(6.5)等于1的条件下求(6.7)的最小值(逗留值)問題。由此立刻知道最小的固有值 λ_1 实际是 $J(\boldsymbol{u})$ 的最小值，而最大的固有值 λ_n 是 $J(\boldsymbol{u})$ 的最大值。

其他的固有值一般說来不是最小值也不是最大值，但通过如下的工作，能把它們作为某种最大最小問題的解来表出。今除了条件(5.2)以外，再附加$(r-1)$个綫性齐次条件(称这些为**約束**):

$$K_i(\boldsymbol{u})=d_{i1}u_1+\cdots+d_{in}u_n=0 \quad (i=1,\ \cdots,\ r-1), \tag{6.8}$$

考虑在这些約束下求(5.1)的最小值問題。若将(6.3)代入(6.8),且用系数 $\{\xi_i\}$ 来写出(6.8)的話,就得到关于 $\{\xi_i\}$ 的同样的$(r-1)$个綫性齐次条件。适当地选取 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 的比，且令 $\xi_{r+1}=\cdots=\xi_n=0$,必能使这些条件得到满足。若更适当地取 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 的值,还能使(6.5)的值为1。因为(6.7)的值不比 λ_r 大,故将所考虑的最小值記为 $m[K_1,\ \cdots,\ K_{r-1}]$，則有

$$m[K_1,\ \cdots,\ K_{r-1}]\leqslant\lambda_r. \tag{6.9}$$

如果采用 $\xi_1=\cdots=\xi_{r-1}=0$ 作为另外的約束,則所考虑的最小值显然等于 λ_r. 因此用所有的方法来取 $K_1,\cdots,K_{r-1}$ 时，$m[K_1,\cdots,K_{r-1}]$的最大值恰好是 λ_r. 这样一来，λ_r 就等于在 $r-1$ 个約束下的 $J(\boldsymbol{u})$ 的最小值的最大值，这称为**最大最小值原理**(maximum-minimum principle)。

作为这个原理的一例,試証明如下的定理：設在(5.1)以外,有相同形式的函数

$$J_1(\boldsymbol{u})=\frac{(\boldsymbol{u},\ A_1\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u},\ B_1\boldsymbol{u})}, \tag{6.10}$$

且 $0\leqslant A_1\leqslant A,\ B_1\geqslant B>0$. 卽設对于所有的矢量 $\boldsymbol{u}\neq 0$,下列各式都成立:

$$0\leqslant(\boldsymbol{u},\ A_1\boldsymbol{u})\leqslant(\boldsymbol{u},\ A\boldsymbol{u}),\ \ (\boldsymbol{u},\ B_1\boldsymbol{u})\geqslant(\boldsymbol{u},\ B\boldsymbol{u})>0, \tag{6.11}$$

则 J_1 的固有值不比同番号的 J 的固有值大。这是因为 $J_1(\boldsymbol{u})\leqslant J(\boldsymbol{u})$，所以对于同样的約束 $K_1, \cdots, K_{r-1}$，有 $m_1[K_1, \cdots, K_{r-1}]\leqslant m[K_1, \cdots, K_{r-1}]$，因此对于两边的最大值，同样的不等式也是成立的。

§7 一般函数的最小值与极小值

以上考虑了二次整式(1.1)及两个二次形式的比(5.1)的最小值(逗留值)，下面考虑更一般的函数

$$J(\boldsymbol{u})=J(u_1, \cdots, u_n) \tag{7.1}$$

的同样問題，但設 $u_1, \cdots, u_n$ 是实数且属于 n 維空間 R_n 的某个变域 D，而 J 的值也是实数。

显然，所謂点 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 为 J 的**最小点**，或在 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 处 J 取**最小值**，就是指对于所有的 $\boldsymbol{u}\in D$，$J(\boldsymbol{u})\geqslant J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 都成立。此时，对于 $\boldsymbol{u}\neq\bar{\boldsymbol{u}}$，如果 $J(\boldsymbol{u})>J(\bar{\boldsymbol{u}})$，则 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是**狹义**(proper)的最小点，否则是**广义**(improper)的最小点。在§1中所处理的二次整式(1.1)，如果矩陣 A 为正值的，则 J 取狹义的最小值。

最小值是在整个給定变域 D 中考虑的，与此相对，局部的最小值称为**极小值**，給出极小值的点，称为**极小点**。所謂点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是 J 的极小点是指选取 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的适当的近旁 N 时，对于 $N\cap D$(N 与 D 的共同部分)中的任意点 $\boldsymbol{u}$，$J(\boldsymbol{u})\geqslant J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 都成立。对于极小，也能和上面一样，区别为狹义的与广义的。

关于最小值(点)的存在，有 **Weierstrass 定理**，叙述如下：如果 D 是 R_n 的有界閉集合，且 $J(\boldsymbol{u})$ 在 D 中为連續，则 J 必有最小点 $\bar{\boldsymbol{u}}$。

§8 逗 留 值

設 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 是 $J(\boldsymbol{u})$ 的极小点，更設 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是 D 的內点(卽和 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 充分近的 R_n 的点都属于 D)，且 J 在 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 处具有偏导数，则依微分法

的定理，在 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 处下式成立：

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=0 \quad (i=1, \cdots, n). \tag{8.1}$$

这是极小的必要条件但非充分条件。又当 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 在 D 的边界上时，(8.1)就不一定成立。

一般的，当 J 在 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 处具有全微分，且(8.1)成立，则称 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为 J 的**逗留点**，$J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 为**逗留值**。这是因为此时 $J(\boldsymbol{u})-J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 比起 $|\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}|$ 来成为高阶无穷小，它的变化可认为已經停止了。依上所述，一般說来极小点不限于是逗留点，而逗留点也不限于是极小(大)点。变分法虽然在大体上被規定为討論最大最小(极大极小)的問題，但事实上它主要是以逗留条件为討論对象的。

不是极小点也不是极大点的逗留点称为**鞍点**。和§2一样，为了把鞍点分类，就要用到型数。一般的，設 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为 J 的逗留点，且設 J 在 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的近旁是二阶連續可微的，则 J 的 Taylor 展开依(8.1)就成为

$$J(\bar{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{v})-J(\bar{\boldsymbol{u}})=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_k}\right)_{\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}} v_i v_k+\cdots. \tag{8.2}$$

这里…是比 $|\boldsymbol{v}|^2$ 阶数高的无穷小。因此，在 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的近旁，$J(\boldsymbol{u})$ 的情况由(8.2)右边的第一項来决定。为簡单計，假定 J 的 Hesse 行列式，即由矩陣

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_k}\right) \tag{8.3}$$

作成的行列式在 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 处不为 0。此时称逗留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为**非退化的**。如果矩陣(8.3)是正値的，则当 $\boldsymbol{v}\neq 0$ 时(8.2)的右边恒为正，而 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是狭义的极小点。一般，称(8.3)的型数(§2)为逗留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的型数。型数为 $0[n]$ 的逗留点是极小(大)点，而型数为 $1, \cdots, n-1$ 的逗留点是鞍点，这与§2相同。

当 Hesse 行列式为 0 时(**退化**逗留点)，逗留点的情况是复杂

的。

例 如在§6中曾看到的，在$\sum\xi_i^2=1$的条件下，

$$J=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2 \tag{8.4}$$

的逗留值等于$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 試定它的型数。但因有$\sum\xi_i^2=1$这样的条件，所以$(\xi_i)$不是$n$維 Euclid 空間$R_n$的点，而是$(n-1)$維球面$S_{n-1}$上的点。由于$S_{n-1}$局部地看来能与$R_{n-1}$同样用$n-1$个坐标表示，故能完全同样地作出型数的定义。为簡单計，假定$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$. 逗留值$\lambda_r$的逗留点有两个，由$\xi_r=\pm1$, $\xi_i=0(i\neq r)$給出。在这两点的近旁，能够把除了ξ_r以外其余的ξ_i取作坐标。借$\xi_r^2=1-\xi_1^2-\cdots-\xi_{r-1}^2-\xi_{r+1}^2-\cdots-\xi_n^2$来消去$\xi_r$，則有

$$J-\lambda_r=\sum_{i\neq r}(\lambda_i-\lambda_r)\xi_i^2. \tag{8.5}$$

因为$\lambda_1-\lambda_r$, $\lambda_2-\lambda_r$, $\cdots$, $\lambda_n-\lambda_r$中有$(r-1)$个为負的，所以上述两点是型数为$r-1$的逗留点。

§9 逗留点的分布

逗留点已如上分类，但它們并非全无規則地分散开来的。为簡单起見，取$n=2$. 設D是由光滑曲綫所圍成的单連通閉域，$J(u_1, u_2)$二阶連續可微，它的逗留点都是非退化的，且不在D的边界上。此时若設型数为0, 1, 2的逗留点，卽极小点，鞍点，极大点的数目分別为m_0, m_1, m_2，則它們都是有限的，且有关系

$$m_0-m_1+m_2=1. \tag{9.1}$$

例如，在一个島上所有山(极大点)与池(极小点)的数目的和等于岭(鞍点)的数目再加1.

对于在更一般的n維流形上所定义的函数$J(\boldsymbol{u})$;类似的关系式也成立。由于这种問題关系到整个流形的性质，所以称为**整体的問題**，它与討論各个逗留点的情况的**局部問題**有不同的性质，且关系到流形的拓扑結构，一般說来是較难的。我們仅說明在这里也有这样的問題，并不加以深入討論。

§10 附有条件的极值問題

有这样的情形，就是要求函数 $J(\boldsymbol{u})$ 的极值（或逗留值），但点 $\boldsymbol{u}$ 不是完全自由的，而被若干个附带条件所限制，即

$$K_i(\boldsymbol{u})=0 \quad (i=1, \cdots, r; r<n). \tag{10.1}$$

在 §7 中所处理的就是这样的一例。試求这种极值的条件。以下假定 J 与 K_i 都有适当的可微性。

在所考慮的点的近旁，設 r 行 n 列的矩陣

$$\left(\frac{\partial K_i}{\partial u_k}\right)_{i=1,\cdots,r;\, k=1,\cdots,n} \tag{10.2}$$

的秩等于 r（某个 r 行 r 列的子矩陣的行列式不为 0）。并不失一般性，可以假定这个非零的行列式是由前 r 列作出来的。这个矩陣的逆陣記为 (L_{ij})。

依假定，$u_1, \cdots, u_r$ 能够通过解 (10.1) 而得出（隐函数定理），設它們是

$$u_i=\varphi_i(u_{r+1}, \cdots, u_n) \quad (i=1, \cdots, r). \tag{10.3}$$

由于它們使 (10.1) 成为恒等式，故若对 $u_k (k=r+1, \cdots, n)$ 微分，就有

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial K_i}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k}+\frac{\partial K_i}{\partial u_k}=0 \quad (i=1, \cdots, r),$$

如果利用 $(\partial K_i/\partial u_j)$ 的逆陣 (L_{ij}) 来解上式，則得

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k}=-\sum_{i=1}^{r} L_{ij} \frac{\partial K_i}{\partial u_k}. \tag{10.4}$$

若将 (10.3) 代入 $J(\boldsymbol{u})$，則因 J 是 $u_{r+1}, \cdots, u_n$ 的函数，故把它的逗留条件换一种表示时，有

$$\begin{aligned} 0&=\frac{\partial J}{\partial u_k}+\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial J}{\partial u_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k}=\frac{\partial J}{\partial u_k}-\sum_{i,j}^{1,r} \frac{\partial J}{\partial u_j} L_{ij} \frac{\partial K_i}{\partial u_k} \\ &=\frac{\partial J}{\partial u_k}-\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial K_i}{\partial u_k}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

此式对于 $k=r+1, \cdots, n$ 都成立，这里

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial J}{\partial u_j} L_{ij} \qquad (i=1, \cdots, r),$$

且依 (L_{ij}) 的定义有

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i \frac{\partial K_i}{\partial u_j}=\frac{\partial J}{\partial u_j} \qquad (j=1, \cdots, r).$$

即(10.5)实际上对于所有的 $k=1, \cdots, n$ 都成立，結果，得到了关于足标 $1, \cdots, n$ 的对称式。

所以要解附有条件的逗留問題，只要导入待定乘数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$，再对 $n+r$ 个未知数 u_i, λ_j 来解(10.5)与(10.1)就可以了。这称为 **Lagrange 待定乘数法**。在此方法中矩陣(10.2)的秩为 r 的假定是很重要的。

这样一来，結果就成为对称形，但在上面 J 是看做 $u_{r+1}, \cdots, u_n$ 的函数来求得逗留条件的，当然要引起这样的疑問，那就是它是否意味着原来的 J 的逗留性？为要回答这一問題，只要注意到由于 $\partial K_i/\partial u_j$ 所作的行列式不为 0，故能采用 $u_{r+1}, \cdots, u_n$ 作为条件(10.1)所决定的 $(n-r)$ 維流形 M 的局部坐标，而在 M 上的逗留性与在空間 $(u_{r+1}, \cdots, u_n)$ 上的逗留性是一致的。

例　在(5.2)这样的附带条件下，用这个方法来处理使(5.1)成为逗留值的問題，只要利用待定乘数 λ，令

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(u, Au)-\lambda \frac{\partial}{\partial u_i}(u, Bu)=0$$

就可以了。这与(5.5)或(5.6)一致。(10.2)的秩为 1 的条件，当 B 为正值时就能滿足了(为什么?)。

§11 凸 函 数

在一些問題中，有 $J(u)$ 的最小值成为别的函数 $I(u)$ 的最大值这样的关系。計算这个最小值的近似值，有較簡便的方法可用。为了一般地来处理这个問題，需要引入凸函数这一概念。

在凸域 D 内定义的函数 $J(\boldsymbol{u})$ 称为是凸的，意指对于任意的 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in D$ 与 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 这样的实数 α，恒有下面的关系式成立：

$$J(\alpha \boldsymbol{u} + (1-\alpha)\boldsymbol{v}) \leqslant \alpha J(\boldsymbol{u}) + (1-\alpha) J(\boldsymbol{v}). \qquad (11.1)$$

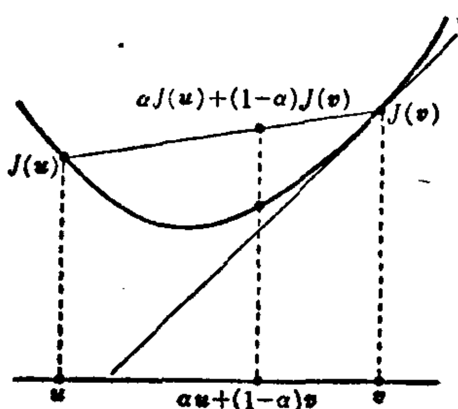


图 11.1

这就意味着連接 $J(\boldsymbol{u})$ 的图形上两点的綫段，决不会出現在图形的下側（图 11.1）。

如果 $J(\boldsymbol{u})$ 是二阶可微的，且矩陣 $(\partial^2 J/\partial u_i \partial u_k)$ 恒为正値（一般説来非負値），则 J 是凸函数。为了説明这一命題，記

$$f(t) = J(t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v}), \qquad (11.2)$$

则恒有 $f''(t) \geqslant 0$. 这是因为

$$f''(t) = \sum_{i,k} (u_i - v_i)(u_k - v_k) \left(\frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_k} \right)_{t\boldsymbol{u}+(1-t)\boldsymbol{v}}$$

的右边不为負的。在此应用 Taylor 定理，得

$$f(1) - f(\alpha) = (1-\alpha) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 f''(\alpha')$$

$$\geqslant (1-\alpha) f'(\alpha), \qquad (11.3)$$

其中 α' 是 1 与 α 之間的数。同样得

$$f(0) - f(\alpha) \geqslant -\alpha f'(\alpha). \qquad (11.4)$$

用 α 乘 (11.3)，用 $1-\alpha$ 乘 (11.4) 再相加，则有

$$\alpha f(1) + (1-\alpha) f(0) - f(\alpha) \geqslant 0,$$

这就是 (11.1)。

設 J 是凸函数，且为一阶連續可微的。在 (11.1) 中記 $\alpha \boldsymbol{u} + (1-\alpha)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$，并把它换写成

$$J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{w}) - (1-\alpha)\frac{1}{\alpha}[J(\boldsymbol{w}) - J(\boldsymbol{v})] \geqslant 0. \qquad (11.5)$$

由于 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \alpha(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$，故当 $\alpha \to 0$ 时，

$$\frac{1}{\alpha}[J(\boldsymbol{w})-J(\boldsymbol{v})]\to\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\boldsymbol{w})\right]_{\alpha=0}$$

$$=\sum(u_i-v_i)\frac{\partial J(\boldsymbol{v})}{\partial v_i}=(\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v}),\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}). \tag{11.6}$$

这里(,)表示矢量的內积(§ 4)。因此在(11.5)中設 $\alpha\to0$，則有

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant J(\boldsymbol{v})+(\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v}),\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}). \tag{11.7}$$

这个式子說明了 J 的图形决不会在它的任意切平面的下方(图 11.1)。还要注意，因为(11.7)的右边是左边的 Taylor 展开的前两項，所以如果不計 $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$ 的高阶无穷小的話，則(11.7)就成为等式。

§ 12 最大最小的相反性

对于前节考虑过的凸函数 $J(\boldsymbol{u})$，在若干个互不矛盾而相互独立的一次約束(不限于齐次)

$$(\boldsymbol{d}^{(i)},\,\boldsymbol{u})=e_i\quad(i=1,\,\cdots,\,r) \tag{12.1}$$

之下，来考虑它的最小值問題。滿足(12.1)的 $\boldsymbol{u}$ 将称为"可取的" $\boldsymbol{u}$。今若取一个可取的矢量 $\boldsymbol{a}$，則同样的条件(12.1)又能表示成

$$(\boldsymbol{d}^{(i)},\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a})=0\quad(i=1,\,\cdots,\,r). \tag{12.2}$$

把 r 个矢量 $\boldsymbol{d}^{(1)},\,\cdots,\,\boldsymbol{d}^{(r)}$ 所張的 r 維子空間記为 N，而把与 N 直交的矢量所作的 $n-r$ 維子空間記为 $\boldsymbol{M}$，則(12.2)就是矢量 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ 属于 $\boldsymbol{M}$ 的条件。

若依(11.7)，則

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant J(\boldsymbol{v})-(\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v}),\,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})$$
$$+(\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v}),\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}). \tag{12.3}$$

現在如設 $\boldsymbol{v}$ 滿足条件

$$\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v})=\lambda_1\boldsymbol{d}^{(1)}+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{d}^{(r)}, \tag{12.4}$$

即"$\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v})$ 属于子空間 N"(这样的 $\boldsymbol{v}$ 将称为"可取的" $\boldsymbol{v}$)，則因 $\mathrm{grad}\,J(\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ 直交，所以(12.3)的最后一項成为0. 在这里

导入函数

$$I(\boldsymbol{v})=J(\boldsymbol{v})-(\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}), \tag{12.5}$$

就有

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant I(\boldsymbol{v}). \tag{12.6}$$

当 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 分别是滿足上述附带条件的可取的矢量时，此式恒成立。

今設在上述附带条件下，$J(\boldsymbol{u})$ 已有逗留点 $\bar{\boldsymbol{u}}$，那末 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 也滿足 $\boldsymbol{v}$ 的附带条件，而 $\operatorname{grad} J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 必須属于 $\boldsymbol{N}$. 如果不是这样，則 $(\operatorname{grad} J(\bar{\boldsymbol{u}}),\ \boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ 对于适当的可取的 $\boldsymbol{u}$ 将不为零，但因在(11.7)中令 $\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{u}}$ 后，正如在那里注意到的，它在 $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}$ 的一阶无穷小的程度上成为等式，所以这就与 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是逗留点相矛盾。利用待定乘数法也能立刻得到同样的結果。

因此在(12.5)中令 $\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{u}}$，則第二項成为0，而得 $J(\bar{\boldsymbol{u}})=I(\bar{\boldsymbol{u}})$. 另一方面，依(12.6)必須 $J(\boldsymbol{u})\geqslant I(\bar{\boldsymbol{u}})$，$J(\bar{\boldsymbol{u}})\geqslant I(\boldsymbol{v})$，所以最后对于所有的各可取的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$，下列式子都成立：

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant J(\bar{\boldsymbol{u}})=I(\bar{\boldsymbol{u}})\geqslant I(\boldsymbol{v}). \tag{12.7}$$

这就說明了 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 一方面等于 $J(\boldsymbol{u})$ 的附带条件的最小值，另一方面又等于 $I(\boldsymbol{v})$ 的附带条件的最大值。这称为关于凸函数的**互易定理**(reciprocity theorem)，而称 $I(\boldsymbol{v})$ 为 $J(\boldsymbol{u})$ 的**相反函数**。

这个定理对于近似計算 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 是方便的，因为若取任意的各为可取的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$，則 $J(\boldsymbol{u})$ 与 $I(\boldsymbol{v})$ 就分別給出 $J(\bar{\boldsymbol{u}})$ 的上界与下界。

例 用矢量記法，設

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}), \tag{12.8}$$

則容易明了 J 是凸函数。現在考虑这一函数在 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}$ 属于矢量子空間 $\boldsymbol{M}$ 这样的附带条件下的最小值問題。因为 $\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{v}$ 应該滿足的条件是 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{b}$ 属于 $\boldsymbol{N}$. 又(12.5)成为

$$I(\boldsymbol{v})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}), \tag{12.9}$$

如果去掉常数项，則 $-I(\boldsymbol{v})$ 具有与 $J(\boldsymbol{u})$ 完全同样的形式，从而能看出 $I(\boldsymbol{v})$ 与

$J(u)$的完全相反性。由于$\bar{u}$是可取的u，同时也是可取的v，故满足$\bar{u}-a\in M$，$\bar{u}-b\in N$。即$\bar{u}$是作为通过a而与M平行的超平面M_a和通过b而与N平行的超平面N_b的交点而确定。从解析方面来看，因为$\bar{u}$同时满足(12.2)与(12.4)，所以可从

$$(d^{(i)},\ \bar{u}-a)=0\quad (i=1,\cdots,r),$$

$$\bar{u}-b=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i d^{(i)}$$

中求解而得。又設b与M_a的距离为d_b，a与N_b的距离为d_a，a与b的距离为$d_{a,b}$，則

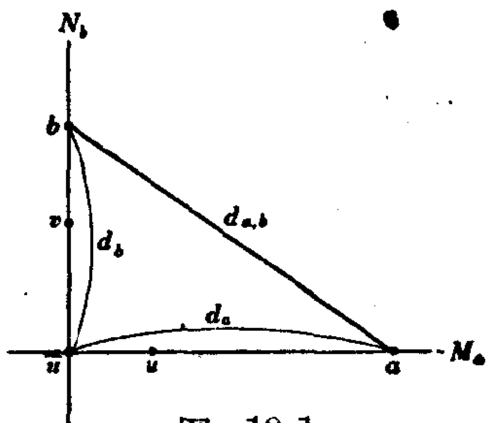


图　12.1

$$2J(\bar{u})=d_b^2,\quad 2I(\bar{u})=d_{a,b}^2-d_a^2.$$

这两个式子的相等就是 Pythagoras 定理(图 12.1)。

习　　题

1. 求下列$J(u)$的逗留值，并說明是否为最小值：

$$J(u)=u_1^2+\frac{1}{3}u_2^2+\frac{1}{5}u_3^2+u_1u_2+\frac{2}{3}u_1u_3+\frac{1}{2}u_2u_3+\frac{1}{2}u_1+\frac{2}{5}u_2+\frac{1}{3}u_3.$$

2. 說明关于u的0次齐次函数

$$J(u)=-\frac{(u,\ a)^2}{(u,\ Au)}+a_0\quad (u\neq 0)$$

的逗留值与§4的二次整式的逗留值(4.6)一致(因此对于矩陣(3.8)能适用§3的消去法来計算)。由于$J(u)$是齐次的，故逗留点$\bar{u}$仅有常数因子是不定的，証明在适当地选取这一常数因子时，$\bar{u}$与(4.5)一致。

3. 証明两个n維矢量u，v的函数

$$J(u,\ v)=(u,\ Av)+(a,\ v)+(u,\ b)$$

的逗留值是$-(a,\ A^{-1}b)$，这里A不限定是对称的，但有逆陣A^{-1}。又說明这个逗留点必为鞍点且有型数n(因为有$2n$个变数，所以型数n并不意味着最大值)。

4. 利用前題，仿照§3作出計算$(a,\ A^{-1}b)$的图式。

5. 在§5，§6的函数$J(u)=(u,\ Au)/(u,\ Bu)$中，对u加上綫性齐次

約束 $K_0(\boldsymbol{u})=0$ 时，J 就成为 $n-1$ 个变数 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 的二次形式的比，这样就确定了相应的固有値 $\lambda_1' \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}'$。对于它們試利用最大最小值的原理，說明下列不等式成立：

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1' \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2' \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}' \leqslant \lambda_n.$$

6. 試求

$$J(\boldsymbol{u})=[(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})+a_0]^{\frac{1}{2}}+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})$$

的逗留值，并求它为极小值的条件，在此設 A 为正値的，且 $a_0>(\boldsymbol{a}, A^{-1}\boldsymbol{a})$.

7. 在平面上的閉域 $u_1^2+u_2^2 \leqslant 1$ 中，求

$$J(\boldsymbol{u})=(1-u_1^2-u_2^2)(1+2u_1^2)(1+2u_2^2)$$

的逗留值，逗留点，并把它們分类，驗証(9.1)，且画出 J 的等高綫(即 $J(\boldsymbol{u})=$ 常数的曲綫)的略图。

第2章　Euler 方程与逗留函数

本章的主题是古典变分学中的重要部分，即 Euler 微分方程以及作为它的解的逗留函数。只要沒有特別的声明，都假定所討論的函数具有必要的連續可微性。

§13　变分法的問題

为了說明古典变分学問題的內容，利用典型的例子来讲要簡捷些。

例　最速曲綫或捷綫(Brachistochrone)。质点沿着光滑而固定的曲綫，仅借重力的作用，从指定点 P_0 滑行到 P_1，为要使滑行时間最短，問須通过怎样的曲綫？

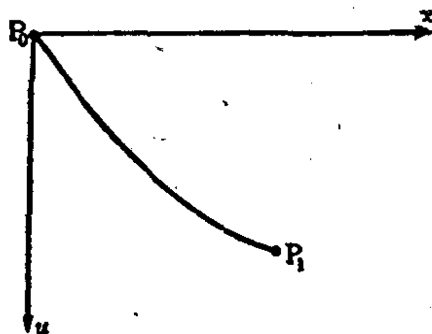


图　13.1

显然可假定所求曲綫位于含有 P_0, P_1 的鉛直平面內，在此平面內以 P_0 作为原点，取 x 軸为水平方向，取 u 軸鉛直向下，設曲綫的方程为 $u=u(x)$ (图 13.1)。重力加速度設为 g。由于在曲綫上的点 (x, u) 处质点的速度为 $(2gu)^{\frac{1}{2}}$，所以质点滑过曲綫微小弧段 $ds=[1+u'(x)^2]^{\frac{1}{2}}dx$ 所需要的时間为 $(2gu)^{-\frac{1}{2}}[1+u'(x)^2]^{\frac{1}{2}}dx$。为簡单起見，設 $2g=1$，則全部时間为

$$J[u]=\int_0^{a_1}u(x)^{-\frac{1}{2}}[1+u'(x)^2]^{\frac{1}{2}}dx. \tag{13.1}$$

問題就是要确定使 $J[u]$ 成为最小的函数 $u(x)$，但 $u(x)$ 必須滿足条件

$$u(0)=0,\quad u(a_1)=b_1\geqslant 0, \tag{13.2}$$

其中 (a_1, b_1) 是 P_1 的坐标。

作为最小值問題，这是与第1章所討論的問題相类似的，但所考慮的取最小值的"函数" $J[u]$ 却不是有限个变数的函数，而实际

上作为变数的是函数 $u=u(x)$. 即 $J[u]$ 是函数的函数，为了与普通的函数有所区别，我們称之为**泛函**(functional)。用符号 [　] 就是为了强調这一点。变分学就是討論泛函的最小(大)值，极小(大)值，更一般地說是逗留值的数学分支。

在此說明一下关于記法的問題。上面在記纵坐标 u 与函数 $u(x)$ 时，都用了同一个字母 u，容易混淆。为了区别它們，本来可用不同記法如 $u=\varphi(x)$，于是就应該将(13.1)中出現的 u 都改写为 φ. 然而对于今后发生的更复杂的問題，如果都这样做，就反而麻煩了。因此往后仍遵从向来的习惯，对于表示坐标的数 u，与作为函数的 u 采用相同的字母，灵活地运用，希望讀者注意。例如在(13.1)的左边 $J[u]$ 中的 u 就不是数而是函数 $u=u(x)$，又在(13.1)的右边，常把 $u(x)^{-\frac{1}{2}}$ 簡記为 $u^{-\frac{1}{2}}$，此时的 u 就不是函数而表示函数值 $u(x)$.

将(13.1)一般化，就产生下面这样的問題。当三个变数的函数 $F(x, u, u')$ 为已知时，試求使得

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1} F(x, u, u')\,dx \tag{13.3}$$

成为最小的函数 $u=u(x)$，指定的条件是

$$u(a_0)=b_0, \quad u(a_1)=b_1. \tag{13.4}$$

这就是古典变分学中最初討論的問題。这里不待言 u' 表示 $\frac{du}{dx}$，而函数 $F(x, u, u')$ 则看作是三个独立变数 x, u, u' 的函数，且具有适当的可微性。作(13.3)右边的积分时先把 $u=u(x)$，$u'=\frac{du(x)}{dx}$ 代入后再进行。由此(13.3)就成为函数 $u=u(x)$ 的泛函 $J[u]$.

§14　Euler 微分方程

設在(13.4)的条件下，存在使(13.3)的值成为最小的函数，

記为

$$u=\bar{u}(x)。\tag{14.1}$$

今另取满足

$$\eta(a_0)=0, \quad \eta(a_1)=0 \tag{14.2}$$

的函数 $\eta(x)$ 与任意实数 ε，若令

$$u_\varepsilon(x)=\bar{u}(x)+\varepsilon\eta(x), \tag{14.3}$$

则因它满足 (13.4)，故为"可取的"函数。u_ε 就称为"变分" $\bar{u}$ 而得的函数。若将 $u=u_\varepsilon(x)$ 代入 (13.3)，则 $J[u_\varepsilon]$ 就成为 ε 的函数，而依假設它在 $\varepsilon=0$ 时应該取最小值，故必成立

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} J[u_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=0。\tag{14.4}$$

如果計算

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} J[u_\varepsilon]\right)_{\varepsilon=0}=\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{a_0}^{a_1} F(x, \bar{u}(x)+\varepsilon\eta(x), \bar{u}'(x)+\varepsilon\eta'(x))\,dx\right)_{\varepsilon=0},$$

则 (14.4) 成为

$$\int_{a_0}^{a_1}[\bar{F}_u\eta(x)+\bar{F}_{u'}\eta'(x)]\,dx=0。\tag{14.5}$$

这里 $\bar{F}_u$, $\bar{F}_{u'}$ 表示在把 x, u, u' 看作独立变数而作 $F(x, u, u')$ 关于 u 或 u' 的偏导函数 F_u 或 $F_{u'}$ 中，代入 $u=\bar{u}(x)$, $u'=d\bar{u}(x)/dx$ 以后所得的函数。

对 (14.5) 应用分部积分法，并考虑 (14.2)，则有

$$\int_{a_0}^{a_1}\left(\bar{F}_u-\frac{d}{dx}\bar{F}_{u'}\right)\eta(x)\,dx=0。\tag{14.6}$$

由此导出結論：$u=\bar{u}(x)$ 必須满足微分方程

$$F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}=0。\tag{14.7}$$

称这一方程为(13.3)的 **Euler 微分方程**。左边如果詳細写出，那就是 $F_u(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u(x), u'(x))$。今后不再这样一一加以說明了。

从(14.6)导出(14.7)时，应用了所謂**变分学基本引理**，它是如下的一个命題：設有連續函数 $f(x)$，它对于满足边界条件(14.2)的任意函数 $\eta(x)$（η 只要求适当高阶可微，其他都可不加考慮），如果恒有

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\eta(x)\,dx = 0, \tag{14.8}$$

则实际上 $f(x) \equiv 0$。这是因为如果在某点 x_0 处 $f(x_0) \neq 0$，例如 $f(x_0) > 0$，则依連續性，在 x_0 的适当近旁有 $f(x) > 0$。因此选取一个在此近旁为正而在此外恒为 0 的函数 $\eta(x)$，则(14.8)的左边就成为正的而与假設相矛盾。

在(14.3)中，以 u 代替 $\bar{u}$，并把 $\varepsilon\eta(x)$ 写为 $\delta\eta(x)$，就称它为 $u(x)$ 的**变分**。(14.5)的左边乘 ε 以后的量

$$\delta J[u] = \int_{a_0}^{a_1} (F_u \delta u + F_{u'} \delta u')\,dx \tag{14.9}$$

一般地称为 $J[u]$ **的第一变分**。(14.5)說明取 $u = \bar{u}$ 时 $J[u]$ 的第一变分成为 0。

§15 逗留函数

把 Euler 微分方程(14.7)詳細写出来，就成为

$$F_u - F_{u'x} - F_{u'u} u' - F_{u'u'} u'' = 0, \tag{15.1}$$

它是关于 u 的二阶微分方程。因此，作为它的一般解，将得到含有两个任意常数的函数。如果能够确定任意常数的值，那末問題就应当认为是解决了。

然而实际上，Euler 方程虽然是 $u = \bar{u}(x)$ 时(13.3)为最小(大)

值的必要条件，但并非充分条件。这与函数 $J[u]$ 情形中条件(8.1)相仿。但如 $u=\bar{u}(x)$ 是 Euler 方程的解，则 $J[u]$ 在此即使不成为最小(大)或极小(大)，也至少应认为是处于逗留状态。在此意义下，称 Euler 方程的解为**逗留函数**，而它的图形就称为逗留曲綫或**极値曲綫**(extremal)(此时边界条件不特别考虑)。还有，所謂极小(大)，逗留等詞的定义正如第1章那样并不簡单，以后再加以注释(§17)。

§16 Euler 微分方程的积分法

虽然 Euler 方程(14.7)或(15.1)都不能簡单地解出，但在某些場合下容易求出它的首次积分。

(1) 函数 F 不显含 u 时。(14.7)經过一次积分立即可得

$$F_{u'}=c,$$

c 是积分常数。

(2) 函数 F 不显含 x 时。(14.7)有积分

$$F-u'F_{u'}=c. \tag{16.1}$$

这是因为左边对 x 微分后，有

$$F_x+F_u u'+F_{u'}u''-u''F_{u'}-u'\frac{d}{dx}F_{u'}$$

$$=u'\left(F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}\right)=0. \tag{16.2}$$

在这里利用了 $F_x=0$ 这一假設与 Euler 方程(14.7)。

应該注意，从(16.1)不一定能倒过来导出 Euler 方程。事实上，(16.2)显然在 $u'=0$ 时也成立，因此对于(16.1)的解 u，如果肯定它不滿足 $u'=0$，则 u 必是逗留函数，但当 $u'=0$ 时就有必要作特别的討論。

例1 試考虑以§13的例作为特殊情况的泛函.

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1} f(u)(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}dx. \tag{16.3}$$

由于 F 不含 x，故有(16.1)那样的积分。因为

$$\begin{aligned} c=F-u'F_{u'}&=f(u)(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}-f(u)u'^2(1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &=f(u)(1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{16.4}$$

所以可得形式解（ξ 是积分常数）

$$c\int[f(u)^2-c^2]^{-\frac{1}{2}}du=\pm(x-\xi). \tag{16.5}$$

实际上，除此以外，(16.1)还有所謂奇异解 $u=b$（b 是使 $f(b)=c$ 的常数），但因对于这个解恒有 $u'=0$，故它是否为 Euler 方程的解，須予特别討論。容易看出，仅当 $f'(b)=0$ 时，$u=b$ 才是 Euler 方程的解。

例2　特别，关于捷綫的問題，因为 $f(u)=u^{-\frac{1}{2}}$，故(16.5)成为

$$c\int\left(\frac{u}{1-c^2u}\right)^{\frac{1}{2}}du=\pm(x-\xi).$$

令 $u=c^{-2}\sin^2\theta$，立刻能算出这个积分而得

$$\left.\begin{aligned} x-\xi&=\frac{1}{2c^2}(2\theta-\sin 2\theta),\\ u&=\frac{1}{2c^2}(1-\cos 2\theta). \end{aligned}\right\} \tag{16.6}$$

故逗留曲綫是半徑为 $1/2c^2$ 的圓沿 x 軸轉动时圓周上一点所描出的曲綫，即所謂擺綫（图16.1）。因为沒有满足 $f'(b)=0$ 的 b，所以 $u=b$ 那样的逗留函数不存在。又对于微分方程(16.1)，$u=c^{-2}$ 是它的奇异点，虽能发生各种各样的复杂情況，但能肯定作为原来 Euler 方程的解的，除了(16.6)以外就不存在了。

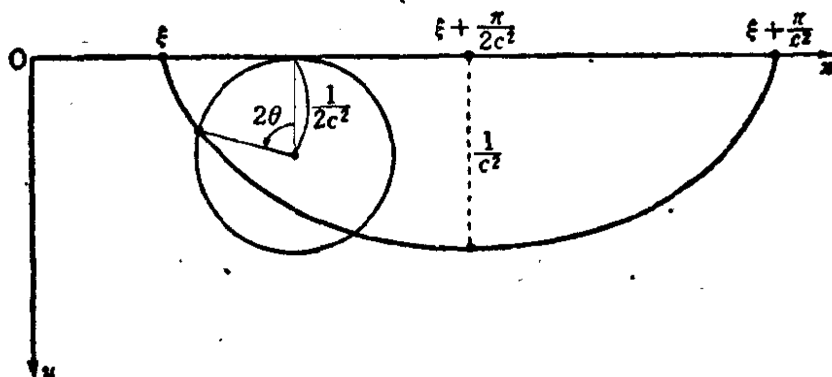


图　16.1

为了使解满足边界条件(13.2)，如果采用 $\theta=0$ 作为出发点，就有 $\xi=0$. 常数 c^2 可由曲綫通过点 (a_1, b_1) 的条件来确定。凭几何学的考查，容易明了这样的 c^2 必存在，而且是唯一确定的。若

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{2}{\pi}, \tag{16.7}$$

质点就不是单調地落下，而是落下了一段以后又上升再达到目的地。

更一般地，当給定了任意两点 (a_0, b_0), (a_1, b_1) $(b_0 \geqslant 0, b_1 \geqslant 0)$ 时，通过这两点的逗留曲綫必存在，且是唯一确定的。

例 3 試考慮例 1 中

$$f(u)=u^{\frac{1}{2}} \tag{16.8}$$

的場合。将力学的最小作用原理应用到抛射体运动就得出这一問題(取鉛直向下方向为 u 軸)。(16.5)能立刻积分而給出

$$u=\frac{1}{4c^2}(x-\xi)^2+c^2. \tag{16.9}$$

根据上面同样的道理，能够肯定除此以外，不再存在有逗留曲綫。因此逗留曲綫是以平行于 u 軸的直綫 $x=\xi$ 作为軸，而以实軸 $u=0$ 作为准綫的抛物綫，焦点在 $x=\xi$, $u=2c^2$.

試討論能否决定积分常数 ξ, c 使 (16.9) 滿足边界条件 (13.4)。根据 $u(a_0)=b_0$, 可知 ξ, c 滿足关系

$$b_0=\frac{(\xi-a_0)^2}{4c^2}+c^2, \tag{16.10}$$

于是把(16.9)换一个写法，就得

$$u=\frac{(x-a_0)^2}{4b_0}+\frac{[(\xi-a_0)(x-a_0)-4b_0c^2]^2}{16b_0c^4} \geqslant \frac{(x-a_0)^2}{4b_0}. \tag{16.11}$$

这就說明了通过定点 (a_0, b_0) 的逗留曲綫族是以上面确定了的抛物綫

$$u=\frac{(x-a_0)^2}{4b_0} \tag{16.12}$$

为其包絡，而且只能在它的下側。因此，如果第二点 (a_1, b_1) 在包絡上，即如果 $4b_0b_1<(a_1-a_0)^2$, 则通过这两点的极値曲綫不存在。反之，如果 $4b_0b_1>(a_1-a_0)^2$, 则逗留曲綫有两条，其中一条在两点之間与包絡相切，而另一条则不相切(图 16.2 的曲綫 I, II)。相应的常数 ξ, c 的值由下式給出：

$$\xi=\frac{(a_0b_1+a_1b_0)\pm(a_0+a_1)d}{b_0+b_1\pm 2d}, \quad c^2=\frac{(a_1-a_0)^2}{4(b_0+b_1\pm 2d)},$$

$$2d=[4b_0b_1-(a_1-a_0)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{16.13}$$

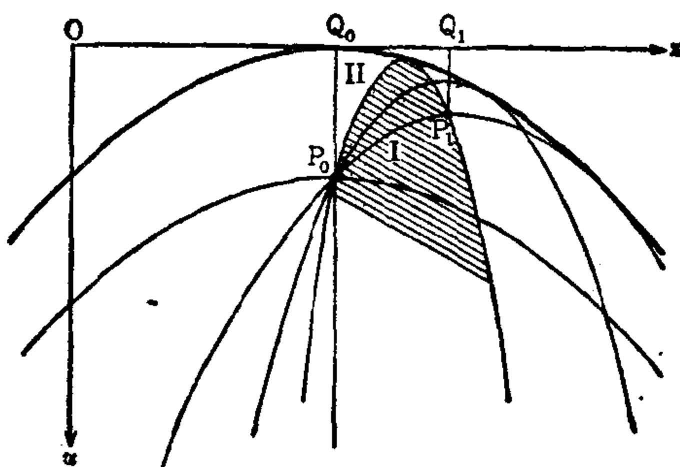


图　16.2

这里，"±"中上面的符号对应于与包络相切的曲綫 II。詳細的計算留供讀者作为习題。

这个例子說明，通过指定两点的逗留曲綫并不是在任何情况下都存在的，就是存在也不限于只有一条。当逗留曲綫有两条以上时，就产生了那一条給出較小的 $J[u]$ 这样的問題，关于这一点，将在以后討論。

例 4　同样，当 $f(u)=u$ 时，这就是使通过給定两点的曲綫 $u=u(x)$，繞 x 軸旋轉所生成的曲面面积成为最小的問題。将 (16.5) 积分即知逗留曲綫是由下式給出的悬鏈綫(catenary)：

$$u=c\cosh\frac{x-\xi}{c}. \tag{16.14}$$

在这里也与例 3 一样，若两点 (a_0, b_0)，(a_1, b_1) 在横的方向上过于离开了，則不存在連結它們的逗留曲綫，如果靠近些，則过这两点有两条逗留曲綫。

§17　极小(大)和逗留的定义

从数学的严密立場来討論作为問題基础的条件与假設，并不是本书的主旨，但因直到現在所叙述的內容稍偏于形式，所以在这一节，将略带批判性地来討論一下泛函数，它的最小，极小，逗留等的意义。

在泛函 (13.3) 中，曾假設函数 $F(x, u, u')$ 定义在三个独立变数 x，u，u' 的某个区域 D' 內，且是充分連續可微的。对此作泛函

二月版　二二二一　十二月十一日

$J[u]$时,是将函数$u=u(x)$当作逐段光滑的(連續且逐段具有連續的导函数),并令$u'=du(x)/dx$而作出(13.3)的积分的。但仅考虑能使$x, u(x), u'(x)$的值被含在上述区域D'内的$u(x)$。更設$u(x)$满足边界条件(13.4)。这样的$u(x)$称为"可取的函数"。在可取的函数中如有特殊的$\bar{u}(x)$,使得

$$J[\bar{u}]\leqslant J[u] \tag{17.1}$$

对于任意可取的函数u恒成立,則$J[\bar{u}]$就是J的最小値,而$\bar{u}$是最小函数。这里,若$u\neq\bar{u}$,則$J[\bar{u}]<J[u]$,此时$J[\bar{u}]$为狭义最小値,否則是广义最小値。

与此相对,极小的定义就要費事一些。和第1章一样,所謂极小意味着局部的最小,但关于局部的这一点也是不簡单的。所謂$J[\bar{u}]$是极小値,乃指它在$\bar{u}$的适当近旁的可取函数的范圍内成为最小値,但所謂近旁可能有各种各样的解釋。例如給出某个正数δ,則满足下式的可取函数u的全体可定义为$\bar{u}$的一个近旁:

$$|u(x)-\bar{u}(x)|<\delta \quad (a_0\leqslant x\leqslant a_1), \tag{17.2}$$

于是$J[\bar{u}]$是极小値就意味着若取适当的正数δ,則对于满足(17.2)的可取函数u,(17.1)恒能成立。按照这个定义的极小称为**强极小**。对于强极小也可区别为狭义的与广义的,这与最小的場合是一样的。

在强极小的定义中,对于$\bar{u}$的近旁的函数u,虽然用(17.2)把$u(x)$的值限制了,但导函数$u'(x)$的值却沒有限制。可是我們也可以限制$u'(x)$,将满足下式的可取函数u的全体定义为$\bar{u}$的一个近旁:

$$|u(x)-\bar{u}(x)|<\delta, \quad |u'(x)-\bar{u}'(x)|<\delta \quad (a_0\leqslant x\leqslant a_1), \tag{17.3}$$

于是所謂$J[\bar{u}]$是极小,就意味着若取适当的正数δ,則对于满足(17.3)的可取函数u,(17.1)恒能成立。按照这个定义的极小称为**弱极小**。对于弱极小也可分为狭义的与广义的。

显然，最小同时是强极小，强极小同时是弱极小，但反过来却不成立。

所謂逗留，它的定义将更为困难些，但在这里姑且形式地来加以說明。当第一变分 (14.9) 对于所有的逐段光滑的 $\delta u(x)$（但 $\delta u(a_0)=\delta u(a_1)=0$）都成为 0 时，就称 $J[\bar{u}]$ 为逗留值，$\bar{u}$ 为逗留函数。

例 在§16 例1中，因为 $(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}$ 对于变数 u' 的任意值都有定义，所以区域 D' 由函数 $f(u)$ 的定义域来确定。在例2, 3 中，因为分别有 $f(u)=u^{\mp\frac{1}{2}}$，所以可取如下的区域作为 D':

$$-\infty<x<\infty,\ 0<u<\infty,\ -\infty<u'<\infty. \tag{17.4}$$

§18 Euler 方程的回顾

如果象前节那样来理解最小，极小，逗留的意义，那就可以看出，在 §14 Euler 方程的导出方面存在着重大的缺陷。即使 $J[\bar{u}]$ 是弱极小，(14.5) 的成立也是沒有問題的。这是因为在 (14.3) 中 $\eta(x)$ 一經固定之后，如果使 ε 充分地小，則 u_ε 就进入 $\bar{u}$ 的"弱近旁"(17.3) 中。又如果 $J[\bar{u}]$ 是逗留值，則依定义 (14.5) 也是成立的。可是从 (14.5) 借分部积分导出 (14.6) 时，却暗中假定了 $d\bar{F}_{u'}/dx$ 的存在，这样做是否正确还是問題。

由于 $\bar{u}$ 当然应該是可取的函数，所以 $\bar{u}'(x)$ 是逐段連續的，从而 $\bar{F}_{u'}=F_{u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))$❶ 也是如此，但并沒有肯定它必然是可微的理由。不用說如果从开始就規定二阶可微的函数才可作为 $u(x)$ 的話，事情就簡单了，但原来作泛函 $J[u]$ 时仅有 $u'(x)$ 就已足够了，故假定 $u''(x)$ 的存在是不恰当的限制。

Du-Bois Reymond 为了克服这个困难，曾将 (14.5) 反方向地分部积分，即

❶ 此处原书誤为 $\bar{F}_{u'}=F(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))$. ——校者注

$$\int_{a_0}^{a_1}\left[\bar{F}_{u'}-\int_{a_0}^{x}\bar{F}_u dx\right]\eta'(x)dx=0. \tag{18.1}$$

与微分不同,因为积分对于逐段連續的函数 $\bar{F}_u$ 无論何时都是可能的,故在此就沒有上述的困难。由于(18.1)对于任何逐段光滑的函数 $\eta(x)$ $(\eta(a_0)=\eta(a_1)=0)$ 都成立,故对于 $u=\bar{u}$ 就得出如下的結果:

$$F_{u'}=\int_{a_0}^{x}F_u dx+\text{常数}. \tag{18.2}$$

在这里用到了下面的輔助命題:設 $f(x)$ 是逐段連續的函数,如果对于滿足 $\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$ 且有連續导函数 $\eta'(x)$ 的任意函数 $\eta(x)$,总有

$$\int_{a_0}^{a_1}f(x)\eta'(x)dx=0, \tag{18.3}$$

則 $f(x)$ 等于常数。为了証明这一定理,先考虑当 $f(x)$ 为連續的情形。在区間 $[a_0, a_1]$ 上 $f(x)$ 的平均值設为 c,記 $f_1(x)=f(x)-c$. 若令

$$\eta(x)=\int_{a_0}^{x}f_1(x)dx, \tag{18.4}$$

則这一 $\eta(x)$ 就滿足上述的条件。由于 $\eta(a_0)=\eta(a_1)=0$,在(18.3)中用 $f_1(x)$ 来代替 $f(x)$ 等式仍成立,故注意到 $\eta'(x)=f_1(x)$,就有

$$\int_{a_0}^{a_1}f_1(x)^2dx=0. \tag{18.5}$$

由于 $f_1(x)$ 的連續性,得 $f_1(x)=0$,即 $f(x)=c$. 当 $f(x)$ 仅是逐段連續时,由于在 $f(x)$ 为連續的各个小区間上,上述結果都成立,所以 $f(x)$ 就逐段地等于常数,再利用(18.3)容易說明,这个常数就全区間来說都必須为同一个值 c. 但作为例外,在一些孤立点处 $f(x)$ 可以与 c 相异。

§19 正則的問題

(18.2) 是代替 Euler 方程 (14.7) 的，从形式上看就是把(14.7)积分了的式子。一般，因为还不知道(18.2)的两边是否可微，所以不能将它微分而得出(14.7)，但在很多重要問題中，这是許可的。例如在 D' 上处处都满足

$$F_{u'u'}\neq 0 \tag{19.1}$$

时就是这样的。

此时根据隐函数定理，把(18.2)的右边看成是已被給定的函数，则能就 u' 来解出(18.2)。由于(18.2)的右边作为某个函数的不定积分时当然是 x 的連續函数，所以解得的結果 u' 实际上就成为 x 的連續函数(在这里(19.1)处处被满足的假定是特别重要的。因为我們知道由此解 (18.2) 时可唯一地确定 u'，所以就导出上述的結論。当(19.1)仅是局部地成立时，那是不充分的)。于是因为 F_u 也是 x 的連續函数，故(18.2)的右边实际上是連續可微的函数，再由隐函数定理解出 (18.2) 的 u' 也就成为連續可微的。这样一来，事实上就得到了 $u''(x)$ 也存在且为連續的結論。在这个基础上，微分(18.2)便知 Euler 方程(14.7)或(15.1)成立。

当(19.1)满足时，就称所考虑的問題是**正則的**。对于正則的問題来說，逗留函数必为 Euler 方程的解。逗留函数比一般的可取函数具有較高阶的可微性，这在变分学中是最有兴趣的事实。

例1 在§16例1中，因为 $F_{u'u'}=f(u)(1+u'^2)^{-\frac{3}{2}}$，故若 $f(u)\neq 0$，則問題为正則的。在例2, 3, 4中，只要考虑 $u>0$ 便满足这个条件。

关于非正則的問題，事情就不这样簡单，且 $u'(x)$ 也不限定是連續的。这时存在着具有角点的逗留曲綫的情形。这种解称为**不連續解**(但依假定 $\bar{u}(x)$ 本身是連續的)。对于現在所考虑的簡单的 $J[u]$(13.3)，不連續解被认为是例外的东西，但在更复杂的問題

中，不連續解決非罕見。在与波动現象有关的問題中，常常会产生不連續解。

以上对于解的可微性作了較詳細的討論，此后如果不特别声明，总是假定了問題的正則性或解的可微性来进行討論的。

此外，关于 $J[\bar{u}]$ 的最(极)小值是否存在这样最根本問題的一般性討論，在本书中沒有編入。但也有如果求出逗留值就知道它卽是最小值的場合。

例 2 作为有不連續解的情形的一例，让我們举

$$F(x, u, u') = u'^2(u'-1)^2.$$

显然 Euler 方程的解是 $u'=$ 常数，卽为直綫。虽然通过任意两点 $P_0(a_0, b_0)$，$P_1(a_1, b_1)$ 的直綫必存在，但它却不一定就給出 $J[u]$ 的最小值。当 P_0P_1 的傾斜率在 0 与 1 之間时，总能用由斜率分别为 0 与 1 的綫段所組成的折綫来联結 P_0，P_1，而这种方法有无限多个(图 19.1)。对于它們来說都有 $F=0$，因此 $J=0$，显然給出 J 的最小值。这样的解都是不連續解。

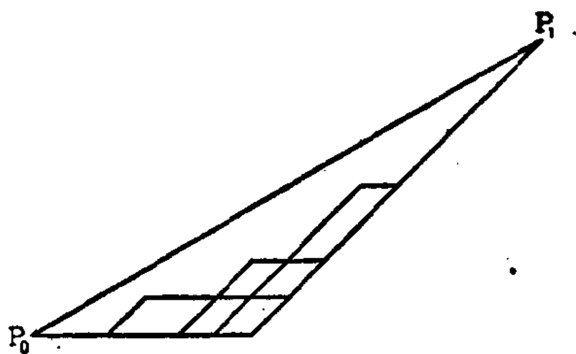


图 19.1

§ 20 Euler 方程的退化情形

Euler 方程(15.1)一般是二阶微分方程，而 u'' 的系数是 $F_{u'u'}$。若与正則情形剛剛相反，恒有 $F_{u'u'}=0$，卽 F 关于 u' 成为一次整式

$$F = M(x, u) + N(x, u)u', \tag{20.1}$$

此时，Euler 方程就成为一阶的微分方程，实际上是

$$M_u + N_u u' - \frac{d}{dx}N = 0, \quad \text{卽} \ M_u - N_x = 0, \tag{20.2}$$

这就不成为微分方程了。因此，一般而論不能使它的解 u 满足边界条件(13.4)。

如果(20.2)在 x, u 平面的单连通区域上恒被满足，则依微分学定理，存在函数 $\Phi(x, u)$ 使得

$$M=\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, u), \quad N=\frac{\partial}{\partial u}\Phi(x, u), \tag{20.3}$$

所以有

$$\begin{aligned} J[u] &= \int_{a_0}^{a_1} F dx = \int_{a_0}^{a_1} \frac{d}{dx}\Phi(x, u(x))dx \\ &= \Big[\Phi(x, u(x))\Big]_{a_0}^{a_1}, \end{aligned} \tag{20.4}$$

若指定 $u(a_0)=b_0$, $u(a_1)=b_1$，那么 $J[u]$ 就有完全不依赖于函数 $u(x)$ 的确定的值。

§21 有多个函数的情形

(13.3) 是仅有一个未知函数 u 的情形，但对于多个未知函数 $u_1=u_1(x), \cdots, u_n=u_n(x)$ 的泛函

$$\begin{aligned} &J[u_1, \cdots, u_n] \\ &= \int_{a_0}^{a_1} F(x, u_1, \cdots, u_n, u_1', \cdots, u_n')dx, \end{aligned} \tag{21.1}$$

也可与前同样处理。相当于(13.4)的边界条件取如下的形式：

$$u_i(a_0)=b_{0i}, \quad u_i(a_1)=b_{1i} \quad (i=1, \cdots, n). \tag{21.2}$$

为了导出逗留函数的条件，利用与 §14 同样的函数 $\eta(x)$，将

$$\left.\begin{aligned} &u_i=\bar{u}_i(x)+\varepsilon\eta(x), \\ &u_k=\bar{u}_k(x) \quad (k\neq i) \end{aligned}\right\} \tag{21.3}$$

代入 $J[u_1,\cdots,u_n]$，再由它在 $\varepsilon=0$ 时为逗留的条件，便可与(14.7)完全同样地导出 $u_1=\bar{u}, \cdots, u_n=\bar{u}_n$ 所应满足的条件

$$F_{u_i}-\frac{d}{dx}F_{u_i'}=0 \quad (i=1, \cdots, n). \tag{21.4}$$

这是一組联立微分方程，称为(21.1)的 Euler 微分方程。与前同

样，它的解称为逗留函数(逗留曲綫)。

在这种情形下，Du-Bois Reymond 的注意也是合用的。这时代替(19.1)正則性的条件是

$$\det(F_{u_i u_k'}) \neq 0. \tag{21.5}$$

例 在分析力学中，若取时間作为 x，取力学系統的一般坐标作为 $u_1, \cdots, u_n$，取 Lagrange 函数(动能与位能的差)作为 F，則由 J 为逗留的条件，这个系統的运动便确定了。Euler 方程(21.4)就成为运动方程。

§22 含高阶导函数的情形

对(13.3)也可考虑含有 u 的高阶导函数的泛函

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1} F(x, u, u', \cdots, u^{(n)})\,dx, \tag{22.1}$$

它的处理并沒有什么两样。相当于(13.4)的边界条件取如下的形式：

$$u(a_0)=b_0, \cdots, u^{(n-1)}(a_0) = b_0^{(n-1)},\ u(a_1)=b_1; \cdots, u^{(n-1)}(a_1)=b_1^{(n-1)}. \tag{22.2}$$

取(14.3)那种形状的函数作为 u，則 $J[u]$ 就成为 ε 的函数，且因它在 $\varepsilon=0$ 时成为逗留的，故得出条件

$$\int_{a_0}^{a_1}[\bar{F}_u\eta(x)+\bar{F}_{u'}\eta'(x)+\cdots+\bar{F}_{u^{(n)}}\eta^{(n)}(x)]\,dx=0. \tag{22.3}$$

但这时 $\eta(x)$ 附有这样的条件，即当 $x=a_0,\ a_1$ 时 $\eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}$ 都为 0. 注意到这一点，对(22.3)应用分部积分，再利用基本引理(§14)，就得出 $u=\bar{u}$ 所应满足的条件

$$F_u-\frac{d}{dx}F_{u'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{u^{(n)}}=0. \tag{22.4}$$

这时(22.1)的 Euler 方程的解就是逗留函数(逗留曲綫)。(22.4)一般是 $2n$ 阶微分方程，故可认为边界条件(22.2)是能满足的。

§23 两个以上的独立变数

为簡单起見，考虑这样的泛函

$$J[u]=\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\,dxdy. \tag{23.1}$$

取两个变数 x, y 的函数 $u=u(x, y)$，并令 $u_x=\partial u/\partial x$, $u_y=\partial u/\partial y$，現在就是要求出使(23.1)的值成为极小或为逗留的 u。作为边界条件，例如設 G 的边界为 Γ，在其上引入参变数 s，而附以条件：

$$\text{在 } \Gamma \text{ 上} \qquad u=f(s). \tag{23.2}$$

在这情况下也能容易地导出 Euler 方程。設給出极小值的函数为 $u=\bar{u}(x, y)$，将

$$u=\bar{u}(x, y)+\varepsilon\eta(x, y) \tag{23.3}$$

代入(23.1)，写出 $\varepsilon=0$ 时 J 为逗留的条件，则与 §14 同样得到

$$\iint_G (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\,dxdy=0. \tag{23.4}$$

施行分部积分并利用基本引理(它在多变数时也照样成立)，最后，作为 $u=\bar{u}$ 所应满足的条件，就导出了 Euler 方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \tag{23.5}$$

这里，F_{u_x} 虽然是把 x, y, u, u_x, u_y 看作独立变数而将 F 对 u_x 来微分的，但在作 $(\partial/\partial x)F_{u_x}$ 时，则分别用 $u(x, y)$, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ 代入 F_{u_x} 中的参变数 u, u_x, u_y，而把 F_{u_x} 看作是 x, y 的函数来处理的(参考 §13, §14 的注意)。

(23.5)一般是关于 u 的二阶偏微分方程。在边界条件(23.2)下求解这一方程称为边界值問題，一般說来这是較困难的問題。

§24 参变数表示

在捷綫問題(§13, 例)中，曾假定所求的曲綫有 $u=u(x)$ 这样

的形式，对此是有疑問的余地的。这是因为平面上的曲綫，除了与平行于 u 軸的直綫至多相交于一点的情形以外，是不能写成这种形式的。在此意义下，几何学的、力学的原来問題与分析的問題之間就有了不协調。

一般，对于决定平面曲綫的問題，把曲綫方程写成 $u=u(x)$ 的形式是不适当的，而利用参变数表示就要好些。

$$x=x(t),\quad u=u(t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{24.1}$$

采用这种形式以后，(13.1)就成为使

$$J[x, u]=\int_0^1 F\left(x, u, \frac{\dot{u}}{\dot{x}}\right)\dot{x}dt \tag{24.2}$$

成为最小的变分問題。$\dot{x}$ 表示 dx/dt. 边界条件为

$$x(0)=a_0,\ u(0)=b_0,\ x(1)=a_1,\ u(1)=b_1. \tag{24.3}$$

因为这是含有两个函数 $x(t)$, $u(t)$ 的問題，所以用 §21 所述的方法来处理就可以了。

但在这个問題中有一特点，那就是用求解(24.2)的 Euler 方程来决定函数組(24.1)是不可能的。这是因为原来 J 的值是依曲綫(24.1)的形状确定的，它并不依賴于用参变数 t 来表示的方法，所以沒有用 J 为最小的条件就能决定函数(24.1)的道理。这意味着两个 Euler 方程不是互相独立的。然而由于我們的目的是决定曲綫而不是确定参变数表示，所以并无妨碍。这一事实和(21.1)形式的泛函中，F 关于 u_1', …, u_n' 恒为正一次齐次式，即对于任意的 $k>0$，恒有

$$\begin{aligned} &F(x, u_1, \cdots, u_n, ku_1', \cdots, ku_n')\\ &\qquad =kF(x, u_1, \cdots, u_n, u_1', \cdots, u_n') \end{aligned} \tag{24.4}$$

的情形是一样的(再参看 § 52～54)。

例 就 §16 例 1 来看，(24.2)的被积函数成为 $f(u)(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{\frac{1}{2}}$，而 Euler 方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}f(u)\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-\frac{1}{2}}=0,\\&\frac{d}{dt}f(u)\dot{u}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-\frac{1}{2}}=f'(u)(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\}\tag{24.5}$$

从第一式得出积分

$$f(u)\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{u}^2)^{-\frac{1}{2}}=常数。\tag{24.6}$$

現在如果$f(u)$决不为0，則依(24.6)或者是$\dot{x}=0$，或者是$\dot{x}\neq 0$，二者必居其一。在后一場合，由于曲綫能写成$u=u(x)$的形状，所以属于已經处理过的情况(§16)。在前一場合，就有$x=$常数，而逗留曲綫是平行于u軸的直綫。此时因为(24.5)的第二式也滿足，所以这个曲綫确是所考虑的几何問題的逗留曲綫。故在图16.2中，作为通过P_0的逗留曲綫，鉛直的直綫也是应該考虑的。这种形状的曲綫不能用$u=u(x)$的形式表出，此时，参变数表示就是必要的了。

§25 自由端

直到現在所考虑的問題，例如在(13.3)中，曲綫$u=u(x)$的两端都是被限定了的。然而这样做是不必要的。我們也可以把对于可取函数不加任何边界条件，而要求(13.3)成为最小或逗留的問題作为变分学問題来考虑。这类問題称为**自由端**問題。与此相对，前者所考虑的問題就称为**固定端**問題。

这时，对于逗留函数来說，Euler 方程仍旧成立。为了說明这一点，就要用到**部分变分原理**。如果$u=\bar{u}(x)$是逗留函数，那么当只考虑在区間端点a_0，a_1处与$\bar{u}(x)$取相同值的函数时，J在$u=\bar{u}$处也必然是逗留的，因此根据§14中同样的理由，就可以导出Euler 微分方程。

但在这里由于泛函J对更广范圍的函数u来說都成为逗留的，所以对于沒有边界条件(14.2)的自由的$\eta(x)$，关系式(14.5)也必須成立。对它作分部积分，并利用$u=\bar{u}$满足 Euler 方程的事实，就得

$$[F_{u'}\eta(x)]_{a_0}^{a_1}=0. \tag{25.1}$$

由于 (25.1) 对于任意的 $\eta(a_0)$, $\eta(a_1)$ 都成立，故 $u=\bar{u}$ 必满足条件：

$$\text{在 } x=a_0,\ a_1 \text{ 处}, F_{u'}=0. \tag{25.2}$$

这个条件并不是从开始就附加到可取函数上的，而仅是逗留函数应該满足的条件。这称为**自然边界条件**。通常就是根据它再从 Euler 方程的解中选出所求的函数。此外，还可考虑左端固定而右端自由的問題，于是逗留函数就满足在左端 $u(a_0)=b_0$，在右端 $F_{u'}=0$ 这样的边界条件。

自由端的条件就是指可取曲綫的端点分别在直綫 $x=a_0$, $x=a_1$ 上。把它更一般化，例如考虑可取曲綫的右端在已知曲綫

$$f(x, u)=0 \tag{25.3}$$

上的場合。此时如果象(24.1)那样用参变数来表出可取曲綫，那末泛函(13.3)就可写成(24.2)的形式。对于逗留曲綫 $x=\bar{x}(t)$, $u=\bar{u}(t)$，考虑变分

$$x=\bar{x}(t)+\varepsilon_1\xi(t), \quad u=\bar{u}(t)+\varepsilon_2\eta(t). \tag{25.4}$$

这里的参数 ε_1, ε_2 不是独立的，而是依 (25.3) 由如下的关系式联系起来，

$$f(\bar{x}(1)+\varepsilon_1\xi(1), \quad \bar{u}(1)+\varepsilon_2\eta(1))=0. \tag{25.5}$$

将(25.4)代入(24.2)，则 J 成为 ε_1, ε_2 的函数，但因在条件(25.5)下，当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ 时 J 应当成为逗留的，所以利用待定乘数 λ，就可写出条件 $[\partial(J-\lambda f)/\partial\varepsilon_j]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0\ (j=1, 2)$. 再由 $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ 满足 Euler 方程，就有

$$\left(F-F_{u'}\left(\frac{\dot{u}}{\dot{x}}\right)-\lambda f_x\right)_{t=1}\xi(1)=0,$$

$$(F_{u'}-\lambda f_u)_{t=1}\,\eta(1)=0. \tag{25.6}$$

因为 $\xi(1)$, $\eta(1)$ 是任意的，故在右端就得出条件

$$F-F_u u'-\lambda f_x=0, \quad F_{u'}-\lambda f_u=0, \tag{25.7}$$

(注意 $\dot{u}/\dot{x}=u'$)。或者也可以写成

$$F-F_u u':F_{u'}=f_x:f_u. \tag{25.8}$$

这称为**横截性**(transversality)条件。在自由端,因为(25.3)已变为 $x=$常数的情形,所以从(25.8)就可导出(25.2)。在(16.3)的場合,(25.8)成为 $1:u'=f_x:f_u$,这表明逗留曲綫与曲綫(25.3)正交,此时横截性与正交性相一致。

对于两个以上未知函数(§21),以及含有高阶微分(§22)等情形下的自由端問題,也能同样导出自然边界条件。在这里,我們将叙述有两个以上独立变数时(§23)的結果。照例,虽然 u 必須滿足 Euler 方程(部分变分原理),但因在"自由边"时,(23.3)的 $\eta(x,y)$ 在边界处不为 0,故将(23.4)分部积分,則剩下边界积分

$$\int_\Gamma [F_{u_x}\cos(\nu, x)+F_{u_y}\cos(\nu, y)]\eta ds=0, \tag{25.9}$$

ν 表示边界上的外法綫。为了使上式对于任意的 η 都成立,必須

$$\text{在 } \Gamma \text{ 上}, \quad F_{u_x}\cos(\nu, x)+F_{u_y}\cos(\nu, y)=0. \tag{25.10}$$

这就是这种情形下的自然边界条件。

§26 向着一方的变分

直到現在为止,我們都是假定了 $J[u]$ 取最小值或极小值的曲綫位于 xu 平面上区域 D 的內部而进行討論的,但也有曲綫靠着 D 的边界的情况,此时 Euler 方程就不一定必被滿足。考虑(14.3)那样的变分时,ε 只取 $\varepsilon\geqslant 0$ 这样一边的值,此外就不允許了,这是因为在 $\varepsilon=0$ 处 J 虽然取最小值,但它不一定成为逗留值。因此得到的不是(14.4)而是不等式 $\geqslant 0$,这样,Euler 方程也必須换写为不等式(但对于 F 仍假定适当的可微性)。

可是对于完全位于 D 內部的最小曲綫部分,Euler 方程是成

立的。这只要单从这一部分来考虑变分就会明了(部分变分原理，§25)。

例 再就§16的例3来看。由于$f(u)=u^{\frac{1}{2}}$在$u\geqslant 0$时都有定义，所以一部或全部都迭合在x軸上的曲綫也可作为可取曲綫。虽然沿着x軸显然有$F=0$，但因此外恒有$F>0$，故有必要把这样的曲綫作为可能确实給出最小值的曲綫来考虑。因此在图16.2中，折綫$P_0Q_0Q_1P_1$有成为連接P_0，P_1的最小曲綫的可能性(§39)。但在$u=0$时，由于$u^{\frac{1}{2}}$不是可微的，故在x軸上，不能考虑上述的“Euler 不等式”。

§27 等周問題

作为附有条件的变分問題之一，有所謂**等周問題**(isoperimetric problem)。設在(13.3)的$J[u]$以外，另給出同样的泛函

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}G(x,\,u,\,u')\,dx, \tag{27.1}$$

并規定了$K[u]$的值，这时，求$J[u]$的最小(极小，逗留)值問題就是等周問題。边界可为自由端，也可为固定端。等周問題就是在周长一定的所有閉曲綫中，求其所圍面积为最大的一条曲綫的問題，这是它命名的由来。

設$u=\bar{u}(x)$为所求的极小函数，考虑变分

$$u=\bar{u}(x)+\varepsilon_1\eta_1(x)+\varepsilon_2\eta_2(x). \tag{27.2}$$

将它代入$J[u]$，$K[u]$，就得到两个变数ε_1，ε_2的函数$J(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，$K(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)$. 由于依假定，在$K(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)=k$这样的条件下，当$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$时$J$取极小值，故借待定乘数法(§10)，下式成立：

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon_1}\right)-\lambda\left(\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_1}\right)=0,\quad\left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon_2}\right)-\lambda\left(\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_2}\right)=0. \tag{27.3}$$

(　)表示$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$时的值。用和以前导出 Euler 方程时完全同样的方法，从(27.3)就可导出$u=\bar{u}(x)$所应满足的式子

$$(F-\lambda G)_u-\frac{d}{dx}(F-\lambda G)_{u'}=0. \tag{27.4}$$

[从(27.3)的两个式子都得出(27.4)]。可見这里只須把被积函数看作 $F-\lambda G$ 而建立 Euler 方程就可以了。关于自由端的自然边界条件以及横截性条件，也可同样处理。这里已沒有多余的未知数 λ 出現，代替它的是增加了一个規定 $K[u]$ 的値的方程。

例　考虑 §16 的例 4。設連接两点的曲綫的长 l 为已知。这就是对于一条由两点支撑着的有重量的长度为 l 的綫如何确定其形状的問題。因此条件是

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}dx=l, \tag{27.5}$$

故在 (16.5) 中令 $f(u)=u-\lambda$ 即得所求的 Euler 方程的积分，从而代替 (16.14)，有

$$u=\lambda+c\cosh\frac{x-\xi}{c}, \tag{27.6}$$

这便是逗留曲綫的表达式。若把它代入(27.5)，就有

$$\sinh\frac{a_1-\xi}{c}-\sinh\frac{a_0-\xi}{c}=\frac{l}{c}. \tag{27.7}$$

(27.6)通过两点 (a_0, b_0)，(a_1, b_1) 的条件是

$$\lambda+c\cosh\frac{a_0-\xi}{c}=b_0,\quad \lambda+c\cosh\frac{a_1-\xi}{c}=b_1. \tag{27.8}$$

从这三个式子就可决定常数 ξ, c, λ. 容易看出，如果 $l^2\geqslant(a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2$（即綫的长比两点間的距离大），則无論何时解都存在而且是唯一的。在此意义下，附有条件的情形比沒有条件时（§16，例4）还要容易处理些。

§ 28　变分法的目的与內容

在結束本章之前，談一談变分法的目的想必不是无益的。原来变分法是作为泛函的最小(大)值問題而提出的，但后来的发展就不一定局限在这个問題上。就某种意义来說，认为单純的逗留性較最小或极小更为本质，从而把变分法看成是討論泛函 $J[u]$ 与它的 Euler 方程在形式上的关系的这种看法也是可以的。根据这种看法，变分法不过是为了导出，或是为了表現一个或一組微分方程 (Euler 方程) 的一种較便利的手段。然而即使仅仅在这个意义下，变分法实际上也发揮了很大的作用。在物理学的各个分支中，能看到的所謂**变分原理**的很多法則就說明了这一点。

在很多場合，变分原理仅以泛函与 Euler 方程的关系作为对象。在这种場合下，也存在着这样的問題，那就是具有微分方程形式的 Euler 方程与泛函的逗留性之間，究竟哪一个是更基本的物理法則？从数学的观点来看，这也是一个重要的問題，但在这里不加叙述。

就变分法的最初意义来說，Euler 方程不过是最小或极小的必要条件之一，仅靠它的研究尙未尽变分法之能事。求最小（极小）的必要而且充分的条件也将是它应該包括的內容，但这是个困难的問題。关于这个問題，在本书中只能討論两三个充分条件。

作为处理变分問題的方法，有完全不依賴于 Euler 方程，而直接以最小（极小）問題为討論对象的所謂**直接法**。这虽是比較新的东西，但对变分学来說却是最自然的方法。即使导出了 Euler 方程，要解它也决不都是容易的，这只要看滿足边界条件的解不存在的例（§16，例 3，4）就会明了。实际上，处理微分方程的边値問題一般是困难的，所以，把变分問題归結到边値問題，也可以說是反而将問題复杂化了。认为把变分問題就其原有形式进行处理比較好些的看法，就是从这里产生的。直接法对于解的存在的証明虽然特別有效，但本书只打算从其应用方面来考察。从这一观点来看，直接法所取的就是所謂近似解法的形式。古典方法将变分問題归結为微分方程，但在这里，反过来将微分方程联系到适当的变分法，而近似地解变分問題。象这样把問題回过来处理的情形是屢見不鮮的。

习　　题

1．在点 x, u 处，介质的折射率为 $n(x, u)$，光通过两点間需时最小的路徑就是实际的光綫。这就是所謂 Fermat 原理。試将它改述为变分法問題。光的速度与 n 成反比。

2．試对 §16 的各例作出其 Euler 方程。

3．在含有多个函数的泛函(21.1)中，当 F 不显含 x 时，証明 Euler 方程具有首次积分，并将它求出。

4．在含有高阶微分的泛函(22.1)中，当 F 不显含 x 时，証明 Euler 方程具有如下的首次积分：

$$F-u'\left[F_{u'}-\frac{d}{dx}F_{u''}+\frac{d^2}{dx^2}F_{u'''}-\cdots\right]-u''\left[F_{u''}-\frac{d}{dx}F_{u'''}+\cdots\right]$$
$$-u'''\left[F_{u'''}-\frac{d}{dx}F_{u''''}+\cdots\right]-\cdots=c.$$

5. 在捷綫問题中,試計算逗留值 $J[\bar{u}]$(利用对应于 P_1 的角 θ_1 来表出)。特别当 P_1 在与 P_0 同样高时($b_1=0$)如何?

6. 在 §16 的例1中,試求 $f(u)=u^{-1}$ 时的逗留函数。

7. 試求

$$J[u]=\int u^k(u^2+u'^2)^{\frac{1}{2}}dx \quad (u>0)$$

的逗留曲綫。

8. 証明形如

$$J[u]=\int u^k g(u')\,dx$$

的泛函的逗留函数具有 $u=c\varphi\left(\frac{x-\xi}{c}\right)$ 的形式(c, ξ 为任意常数)。注意 §16 的例2, 3, 4是本題的特殊情况。

9. 指出对于(24.4)那样的 F, Euler 的关系

$$u_1'F_{u_1'}+\cdots+u_n'F_{u_n'}=F$$

恒等地成立,并利用这一关系証明恒等式(故此問題决非正則的)

$$\det(F_{u_i'u_k'})=0.$$

10. 在 $u(0)=0$, $u(1)=1$ 这样的条件下,說明

$$J[u]=\int_0^1(1+u'^2)^{-1}dx$$

虽然沒有最小值也沒有最大值,但 $J[u]$ 的值具有有限的上限1,下限0. 本題說明了泛函不一定有最大值,最小值。$J[u]$ 的逗留函数是什么?

第3章　二次微分式的变分

正如第1章中的二次整式的极値問題是一般場合的基础一样，在变分法中，被积函数是未知函数的二次式的情形，在理論上以及应用上也是基本的。此时 Euler 方程成为綫性的。固有値問題与它有密切的关系，我們設想讀者已具有这方面的一定知識。照例假定以下所遇到的函数都是足够次数可微的。

§29　二次微分式的极値問題

仅有一个关于单变数 x 的未知函数 $u(x)$ 的二次微分式具有如次的形式：

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2$$
$$+2f(x)u+2g(x)u']dx. \tag{29.1}$$

与 u, u' 无关的項由于无关重要而略去了。經过簡单的計算就会知道，这个泛函的 Euler 方程是由下列关于 u 的二阶綫性微分方程給出：

$$(ru')'+(q'-p)u+g'-f=0. \tag{29.2}$$

作为边界条件，对固定端問題，u 的值在端点处为已知，而在自由端时，依(25.2)就要求有自然边界条件：

$$在\ x=a_0,\ a_1\ 处，\quad ru'+qu+g=0. \tag{29.3}$$

要上述問題是正則的(§19)，依(19.1)就必須到处有 $r(x)\neq 0$. 于是以下假定

$$r(x)>0\quad (a_0\leqslant x\leqslant a_1). \tag{29.4}$$

作为另外的例，試考虑关于二变数 x, y 的函数 $u(x,y)$ 的二次

微分式

$$J[u]=\iint_G [u_x^2+u_y^2+2f(x,\ y)u]\,dxdy, \tag{29.5}$$

相应的 Euler 方程是綫性偏微分方程

$$\Delta u=f. \tag{29.6}$$

Δ 是 Laplace 算子 ($\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$). 边界条件是，若为固定边，则在 G 的边界 Γ 上 u 的值为已知(这称为偏微分方程(29.6)的第一种边界条件)；若为自由边，则依(25.10)就要求适合自然边界条件(第二种齐次边界条件)：

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0. \tag{29.7}$$

更一般的，可考虑将含有边界积分的项加到(29.5)的泛函上而有

$$J[u]=\iint_G (u_x^2+u_y^2+2fu)\,dxdy$$
$$+\int_\Gamma [\rho(s)u^2+2\sigma(s)u]\,ds. \tag{29.8}$$

Euler 方程由于不受边界积分的影响，故仍由 (29.6) 給出。对于固定边，由于(29.8)的最后一項成为常数，所以問題一点不变；但对于自由边，自然边界条件就变了。依变分(23.3)，由于(25.9)式加上了这样的項：

$$\int_\Gamma (2\rho\bar{u}+2\sigma)\eta\,ds,$$

結果，自然边界条件就成为(第三种边界条件)

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}+\rho u+\sigma=0. \tag{29.9}$$

把相当于(29.8)的第二項的式子对(29.1)来考虑的話，就有如下的形式：

$$\rho_0u_0^2+2\sigma_0u_0+\rho_1u_1^2+2\sigma_1u_1\quad (u_0=u(a_0),\ u_1=u(a_1)). \tag{29.10}$$

把它附加到(29.1)来考虑自由端問題，則(29.3)的自然边界条件就变为

$$\left.\begin{aligned} r_0u_0'+(q_0-\rho_0)u_0+g_0-\sigma_0=0, \\ r_1u_1'+(q_1+\rho_1)u_1+g_1+\sigma_1=0. \end{aligned}\right\} \quad (29.11)$$

这里 $u_0'=u'(a_0)$，$r_0=r(a_0)$等等。

(29.10) 虽然不是取积分的形式，但仍是函数 $u(x)$ 的泛函。在这里所以不加上 u_0' 这样的項，是由于作为所考虑的可取函数 $u(x)$的泛函，u_0' 等已經是特异的东西了。依同样的理由，在(29.8)的第二項中也沒有引入 u 的导函数。

§30 固有值問題

仅取(29.1)的二次齐次的部分，即

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2]dx, \quad (30.1)$$

另取确定的函数 $k(x)>0$，并附以条件

$$K[u]=\int_{a_0}^{a_1}k(x)u^2dx=1, \quad (30.2)$$

而考虑求 J 的最小(逗留)值問題。这是等周問題(§27)的一例，而 Euler 方程則是 $J-\lambda K$ 的 Euler 方程，由下式給出：

$$(ru')'+(q'-p+\lambda k)u=0. \quad (30.3)$$

再作为边界条件，如果从开始就要求

$$u_0=u(a_0)=0,\ \ u_1=u(a_1)=0, \quad (30.4)$$

則依 (30.3)，(30.4) 就产生一个固有值問題。要使方程(30.3)的满足(30.4)的解存在，λ 就不能取任意的值，而必为某些特定的值，这些值就称为**固有值**，并用 λ_1, λ_2, …来表示。固有值的决定与条件(30.2)无关，而(30.2)仅仅对于把**固有函数** $u(x)$ 的大小加以規范化发生作用。

固有值分布的大概状况从下面的考察中就能知道。由于依

(29.4)假定了 $r(x)>0$,故(30.3)的解 $u(x)$ 具有这样的图形,即若 λ 大;則迅速地振动,而若 λ 充分小(代数的),則不振动。今試令 λ 取各种值,并在(30.3)的解中观察满足 $u(a_0)=0$ 的解,則当 λ 充分小时,$u(x)$ 的图形完全不振动,而成为 $u(x)=0$ 的点(称为节(node)),除 $x=a_0$ 以外就沒有了。当 λ 变大时,最初的节出現了,且随着 λ 的增大而向左推进。这个节剛巧与 a_1 一致时 λ 的値 λ_1,就是最小的固有値。λ 进一步变大时第二个节出現了,它与 a_1 一致时 λ 的値 λ_2 是第二个固有値。这样一来,固有値就作成如下的数列:

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \tag{30.5}$$

而当 $n\to\infty$ 时,就有 $\lambda_n\to\infty$. 同时,可知屬于 λ_n 的固有函数 $u^{(n)}$ 在区間 (a_0, a_1) 的內部恰好有 $(n-1)$ 个节。

以上考虑了固定端(30.4),至于自由端的情形也大体相同。这时一般是将(29.10)的二次項 $\rho_0u_0^2+\rho_1u_1^2$ 附加到(30.1)。自然边界条件依(29.11)变成(因为(30.2)不含 u' 所以边界条件中沒有 λ):

$$r_0u_0'+(q_0-\rho_0)u_0=0, \quad r_1u_1'+(q_1+\rho_1)u_1=0. \tag{30.6}$$

此时固有値 λ_n,固有函数 $u^{(n)}$ 的叙列也存在。

在上面暗中假定了系数 $r(x)$ 等具有充分的連續性,特别依(29.4),$r(x)$ 在閉区間 $[a_0, a_1]$ 上有正的下界($r(x)\geqslant\delta>0$). 如果这样的条件不滿足,則对上述固有値的性质作适当修正是必要的。

对于二維的問題(29.5)或(29.8),也可考虑同样的等周問題。最簡单的是在附带条件

$$K[u]=\iint_G k(x, y)u^2dxdy=1 \quad (k>0) \tag{30.7}$$

之下,使

$$J[u]=\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dxdy \tag{30.8}$$

成为最小(逗留)的問題。它就引到如下的 Euler 方程

$$\triangle u+\lambda ku=0. \tag{30.9}$$

如果添上边界条件:

$$\text{在 } \Gamma \text{ 处}, \quad u=0, \tag{30.10}$$

则(30.9)就成为固有值問題。若是 $k(x, y)>0$, 则仍只有某些特殊的 λ 值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$是固有值。在此虽然也是 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, 但在 $\{\lambda_i\}$ 中可以有彼此相等的(**縮重固有值**)。

§31 固有函数的正交性与完备性

如果就前节討論过的問題(30.1), (30.2), 将两个函数$u(x)$, $v(x)$的內积記为

$$(u, v)=\int_{a_0}^{a_1} u(x)v(x)dx, \tag{31.1}$$

并定义**算子** A, B 如下:

$$\left.\begin{aligned}Au&=-(ru')'+(p-q')u,\\ Bu&=ku,\end{aligned}\right\} \tag{31.2}$$

则 A, B 为**对称的**,即成立关系:

$$(Au, v)=(u, Av), \quad (Bu, v)=(u, Bv). \tag{31.3}$$

但限定 A 仅作用于满足边界条件 (30.4) 的函数。于是(31.3)的第一式依分部积分可立刻得出。更因为有

$$(u, Au)=J[u], \quad (u, Bu)=K[u], \tag{31.4}$$

因此所考虑的問題归結为在$(u, Bu)=1$的条件下使(u, Au)成为逗留的問題,且与§5的問題在形式上完全相同。实际上,Euler 方程(30.3)可写为

$$Au=\lambda Bu, \tag{31.5}$$

它取与(5.6)完全相同的形式。

§6所述的固有函数的正交性(6.2)也以完全相同的形式成立。这是因为

$$Au^{(i)}=\lambda_i Bu^{(i)},\quad Au^{(k)}=\lambda_k Bu^{(k)}, \tag{31.6}$$

利用 A, B 的对称性就有

$$\lambda_k(u^{(i)}, Bu^{(k)})=(u^{(i)}, Au^{(k)})=(Au^{(i)}, u^{(k)})$$
$$=\lambda_i(Bu^{(i)}, u^{(k)})=\lambda_i(u^{(i)}, Bu^{(k)}).$$

与§6不同之处就是这里固有值的数目有无限多。可是利用无限多个相应的固有函数 $\{u^{(i)}(x)\}$，就可以将"任意的"函数 $u(x)$ 展成如次形式：

$$u(x)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i u^{(i)}(x). \tag{31.7}$$

这种展开刚巧与矢量的展开(6.3)相当，且展开系数 ξ_i 由与(6.4)完全相同的式子給出。对此有

$$K[u]=(u, Bu)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^2,\ J[u]=(u, Au)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\xi_i^2 \tag{31.8}$$

成立，也与§6一样。事实上，虽然(31.7)右边的无穷級数并不一定总是在通常意义下收斂的(在这里用了～这样的記号)，但无論怎样，对于(31.7)所确定的系数，(31.8)总是成立的。这称为 **Parseval 公式**，而称这一公式成立的正交系 $\{u^{(i)}\}$ 是**完备的**。

在(31.8)成立时，§6中所述的結果都照样成立。因此固有値 λ_i 都是在附带条件 $K[u]=1$ 之下 $J[u]$ 的逗留値，而它的型数等于 $i-1$，特別 λ_1 是最小値。又在 $K[u]=1$ 之外，添上 $i-1$ 个一次約束时，$J[u]$ 的最小値中的最大値等于 λ_i.

相当于§6中考虑过的維数 n 在这里是 ∞，而最大的固有値不存在。故 $J[u]$ 有最小値但无最大値。象这样关于 J 的大小方面的性质有所不同，不待言是同 $r(x)>0, k(x)>0$ 的假定有关的。

对于問題(30.7),(30.8),情形也大体相同。这时只要如下来定义內积(,)及算子 A, B 就可以了:

$$(u, v)=\iint_G u(x, y)v(x, y)dxdy, \tag{31.9}$$

$$Au=-\Delta u, \quad Bu=ku. \tag{31.10}$$

但設 A 所应作用的函数 u 是滿足边界条件(30.10)的。于是在形式上同样的結果(31.3)~(31.8)成立。但这时由于固有值中可以有相等的,所以相应的固有函数就应按正交的要求来确定。詳細情況請参看有关固有值問題的专著。

§ 32 正定二次形式

在前节所述的固有值問題中,如果 $\lambda_1>0$, 則所有的固有值都是正的,而且反过来也成立。此时依(31.8),一般是 $J[u]\geqslant 0$, 而仅当所有的 $\xi_i=0$, 因而 $u=0$ 时,才有 $J[u]=0$. 故若 $\lambda_1>0$, 則 $J[u]$ 是(狹义)正定的。而且反过来也成立。

实际上,所謂 $J[u]$ 是正定的条件仅为 J 的性质,而与 K 无关,所以利用与 J 及 K 都有关系的固有值 λ_1 来表示也可說是不适当的。事实上,就是不用 λ_1, 也能够将这个条件表达出来。从§30所述就会明了,为要 $\lambda_1>0$,其必要而又充分的条件是在(30.3)中令 $\lambda=0$ 以后所得式子的解 $u(x)$ 虽然滿足 $u(a_0)=0$, 但在 $a_0<x\leqslant a_1$ 时决不成为 0. 因为常微分方程的解是連續地依賴于初始条件的,所以代替 $u(a_0)=0$, 而取充分小的 ε 来考慮 $u(a_0-\varepsilon)=0$ 这样的解,則它在 $a_0\leqslant x\leqslant a_1$ 时决不应該成为 0. 因此得到了如次的定理:对于滿足 $u(a_0)=u(a_1)=0$ 的任意的 $u(x)\neq 0$, 为要

$$J[u]=\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+2q(x)uu'+r(x)u'^2]dx>0 \tag{32.1}$$

恒能成立,其必要且充分的条件是在微分方程

$$(ru')' + (q'-p)u = 0 \tag{32.2}$$

的所有解中有在閉区間$[a_0, a_1]$上决不为0的解。这个条件与$k(x)$完全无关。

以上应用固有值問題的理論导出了这个定理，但也可直接簡单地証明这个条件是充分的。为此，設(32.2)的解中不为0的是$v(x)$，因

$$p = q' + \frac{1}{v}(rv')', \tag{32.3}$$

将此代入(32.1)，被积函数变为

$$\begin{aligned} & q'u^2 + \frac{1}{v}(rv')'u^2 + 2quu' + ru'^2 \\ &= \frac{d}{dx}\left(qu^2 + \frac{1}{v}rv'u^2\right) - rv'\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{v}\right) + ru'^2 \\ &= \frac{d}{dx}\left[\left(q + \frac{1}{v}rv'\right)u^2\right] + r\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2. \end{aligned} \tag{32.4}$$

前一項的积分后为0，而剩下的項不为負。仅当$u/v=$常数时才到处有$u'=(u/v)v'$，但因u在区間的端点为0，而v决不为0，故若$u\neq0$，則这样的情况是不可能的。由此就証明了$J[u]>0(u\neq0)$。

为了說明上述的条件，利用共轭点这一概念有其便利之处。指定了定点x_0时，在微分方程(32.2)的所有解中，满足$u(x_0)=0$的解除了相差一常数因子以外只有一个。这个解的零点中紧位于x_0的右邻的，即$x_1>x_0$而最初使$u(x_1)=0$的点x_1，称为微分方程(32.2)的x_0的共轭点。因此，为了要(32.1)成立，其充要条件为：关于(32.2)的a_0的共轭点a'或者沒有，或者比a_1大(图32.1)。

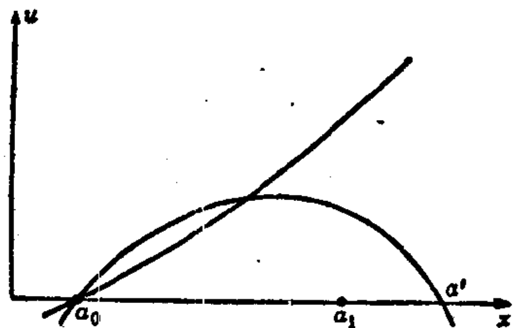


图 32.1

二次形式(30.8)恒为正定，这从它的形式就会明了。因此

(30.9)的固有値 λ_n 都是正的。

例 如果 $u(0)=u(1)=0$, 証明

$$\int_0^1 u'^2dx \geqslant \pi^2\int_0^1 u^2dx. \tag{32.5}$$

設 $\varepsilon>0$, 命

$$J[u]=\int_0^1\left[u'^2-\frac{\pi^2}{(1+2\varepsilon)^2}u^2\right]dx, \tag{32.6}$$

則因 $p=-\pi^2(1+2\varepsilon)^{-2}$, $q=0$, $r=1$, 所以,若取

$$v(x)=\sin\frac{\pi}{1+2\varepsilon}(x+\varepsilon)$$

作为微分方程(32.2)的解,則它在$[0,1]$上决不为0.由此若 $u\neq0$,則 $J[u]>0$. 在这里若令 $\varepsilon\to0$, 卽得(32.5)。还有,在(32.5)中若設 $u=c\sin\pi x$, 則等号成立。

§33 极小問題

在§29中,我們仅是作为二次微分式(29.1)的逗留条件而求出了 Euler 方程,今試求此逗留值成为极小值(或最小值)的条件。暂且假定满足 Euler 方程(29.2)与边界条件的函数 $u=\bar{u}(x)$ 是存在的。命

$$u=\bar{u}(x)+\varepsilon\eta(x), \tag{33.1}$$

并代入(29.1),因 $\bar{u}$ 满足 Euler 方程与边界条件,故 ε 的一次項为0, 且有

$$J[u]-J[\bar{u}]=\varepsilon^2\int_{a_0}^{a_1}(p\eta^2+2q\eta\eta'+r\eta'^2)dx. \tag{33.2}$$

若除去因子 ε^2, 則右边就有与(32.1)相同的形式。今来考虑固定端的情形,于是变分 $\eta(x)$ 在 $x=a_0$, a_1 处为0. 为要 $J[\bar{u}]$ 是极小,当 $\eta\neq0$ 时,其必要而充分的条件是(33.2)恒为正的。为此,依前节的定理,关于微分方程(32.2)的点 a_0 的共軛点較 a_1 为大又是必要而且充分的。实际上,在这一問題中由于 ε 没有取得小的必要,所以这时 $J[\bar{u}]$ 是狭义强极小值,同时也是狭义最小值。

以上曾假定了边界值問題的解 $\bar{u}$ 是存在的，而事实上，当上述条件满足时，$\bar{u}$ 确是存在的。这是因为在 (32.2) 的解中，满足 $u_0(a_0)=0$ 的解与满足 $u_1(a_1)=0$ 的解互为綫性无关（即 $u_0(a_1)\neq 0$, $u_1(a_0)\neq 0$），所以在 (29.2) 的一般解

$$u=(\text{特解})+c_0u_0(x)+c_1u_1(x)$$

中，适当地选取 c_0, c_1 就能使 $u(a_0)$, $u(a_1)$ 取任意的值。

由于要求問題的正則性，我們从开始就假定了象 (29.4) 那样的 $r(x)>0$. 但如要 $J[u]$ 有极小值，这"几乎"是必要的。这是因为假如在某一点 x_0 处 $r(x_0)<0$，则在 x_0 的适当的某一近旁有 $r(x)<0$. 如果在那里如图 33.1 那样选取仅在 x_0 的附近才不为 0 的函数，则当 $\delta\to 0$ 时，(33.2) 的右边第三項就絕对值来說将比其他的两項都要大些，从而 $J[u]<J[\bar{u}]$.

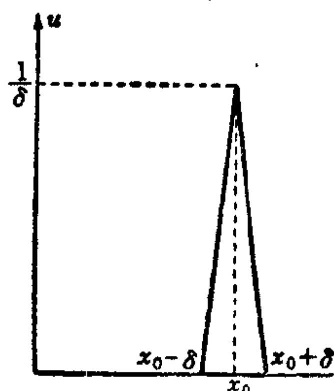


图 33.1

对于泛函 (29.5)，設边界值問題的解为 $\bar{u}(x, y)$. 若令

$$u=\bar{u}(x, y)+\varepsilon\eta(x, y), \tag{33.3}$$

则因

$$J[u]-J[\bar{u}]=\varepsilon^2\iint_G(\eta_x^2+\eta_y^2)\,dx\,dy, \tag{33.4}$$

显然有 $J[u]>J[\bar{u}]$，从而 $J[\bar{u}]$ 是 J 的狹义最小值。此时在关于函数 $f(x, y)$ 与区域 G 的适当条件下，虽然也能証明解 $\bar{u}$ 的存在，但这个証明并不象常微分方程中那样簡单。至于这个証明，有把問題純粹作为偏微分方程的边界值問題来处理的方法，也有直接作为变分法問題来处理的方法（直接法，§ 28）。

习 題

1. 証明当 $u(a_0)=b_0$, $u(a_1)=b_1$ 被指定时，(29.1) 的逗留值 $J[\bar{u}]$ 等于

$$q_1b_1^2+r_1b\bar{u}_1'+b_1g_1-q_0b_0^2-r_0b_0\bar{u}_0'-b_0g_0+\int_{a_0}^{a_1}(f\bar{u}+g\bar{u}')\,dx$$

(但 $q_1=q(a_1)$ 等等)。

2．証明　　$J[u]=\int_0^1 x^2u'^2dx,\ u(0)=0,\ u(1)=1$

沒有最小值。J 的下限为何？如果用 x^k 来代换 x^2 将会怎样？注意到，如果觀察滿足边界条件的逗留曲綫，不难看出它确实給出最小值。(为什么?)

3．在(32.4)中曾用的 v 是(32.2)的解，試証明对于任意的函数 $v(x)\neq 0$，同样的 $J[u]$ 滿足

$$J[u]\geqslant\int\left[-\frac{(rv')'}{v}+p-q'\right]u^2dx.$$

4．导出

$$J[u]=\int_G(u_x^2-u_y^2)\,dxdy$$

的 Euler 方程。說明在 G 的边界 Γ 上指定任意的边界值 $u(s)$ 时，逗留函数不一定存在。

第4章　极小的条件

在第2章中仅着眼于泛函的逗留性，而实际上逗留值是否为极小或最小尚未作为問題提出。本章将利用第3章的結果来討論这些問題，不过考虑到应用上的便利，所以重点放在极小或最小发生的充分条件上。

§34 第二变分，Legendre 条件

再就(13.3)的泛函来考虑固定端的变分問題。在导出 Euler 方程时，曾經代入变分(14.3)并令 $(\partial J/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}=0$，但一般对于 ε 的函数 $J[u_\varepsilon]$ 应用 Taylor 定理就得

$$J[u_\varepsilon]-J[\bar{u}]=\varepsilon\left(\frac{\partial J}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 J}{\partial\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=\theta}, \qquad (34.1)$$

θ 是 0 与 ε 之間的实数。

(34.1)的右边第一項是 J 的第一变分，它成为0就是逗留性的条件。第二項(或者于此取 $\theta=0$)称为**第二变分**。为要 $J[\bar{u}]$ 是 J 的狭义极小值，其必要且充分的条件是对于充分小的 $|\varepsilon|$，$(\partial^2 J/\partial\varepsilon^2)_{\varepsilon=\theta}>0$. 将(13.3)代入 $J[u]$，并把这个条件写出来就得

$$\int_{a_0}^{a_1}[(\bar{F}_{uu})_\theta\eta^2+2(\bar{F}_{uu'})_\theta\eta\eta'+(\bar{F}_{u'u'})_\theta\eta'^2]dx>0, \qquad (34.2)$$

$(\bar{F}_{uu})_\theta$ 等的意义是

$$(\bar{F}_{uu})_\theta=F_{uu}(x,\bar{u}(x)+\theta\eta(x),\bar{u}'(x)+\theta\eta'(x)). \qquad (34.3)$$

这里 θ 虽是 ε 的函数，但 θ 与 ε 的关系并不是从开始就給出了的，因为一般是很复杂的，所以(34.2)作为必要条件没有太大的作用。然而由于 $\varepsilon\to0$ 时 $\theta\to0$，故(34.2)可看作是这样的条件：

$$\int_{a_0}^{a_1}(\bar{F}_{uu}\eta^2+2\bar{F}_{uu'}\eta\eta'+\bar{F}_{u'u'}\eta'^2)\,dx>0. \qquad (34.4)$$

$\bar{F}_{uu}$ 等等是在(34.3)中置 $\theta=0$ 后的值(§14)。

(34.4)的左边是关于 η 的二次微分式，且与(33.2)具有相同的形式。为要它是正值的,正如§33中所指出,首先

$$\bar{F}_{u'u'}>0 \qquad (34.5)$$

几乎是必要的。实际上,因为我們的主要目的仅是討論正則的問題(§19),所以(34.5)在本质上并不是新的假定。(34.5)称为 **Legendre 条件。**

例　如在§19中所曾注意的那样,对于§16的各个例子来說,Legendre 条件都是滿足的。

§35 Jacobi 条件,弱极小的充分条件

仅是 Legendre 条件，对于条件(34.4)的成立来說并不是充分的。为此还必須§32及§33所述的正定性的条件成立。即关于(34.4)的二次形式的最小的固有值 λ_1 必須为正。如果用另外的表示方法,那就是要求关于 v 的微分方程

$$(\bar{F}_{u'u'}v')'+\left(\frac{d}{dx}\bar{F}_{uu'}-\bar{F}_{uu}\right)v=0 \qquad (35.1)$$

的 $x=a_0$ 的共轭点 a' 要比 a_1 大些。这称为 **Jacobi 条件**,而(35.1)就称为 **Jacobi 微分方程。**

Legendre 条件和 Jacobi 条件与特定的逗留函数 $\bar{u}(x)$ 有关。这是因为 $\bar{F}_{u'u'}$ 等都由 $F_{u'u'}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))$ 确定。这些条件的滿足与(34.4)的成立是等价的。虽然(34.4)与眞的极小条件(34.2)有所不同,但如果(34.4)成立,则对于充分小的 ε(因而充分小的 θ),(34.2)也就成立。后者不只是在取定 $\eta(x)$ 后当 $|\varepsilon|$ 充分小时是正确的,而在把变分 $\varepsilon\eta(x)$ 連在一起,只要 $|\varepsilon\eta(x)|$ 及 $|\varepsilon\eta'(x)|$ 都充分小,则 $\varepsilon\eta(x)$ 无論是什么也都成立。这一事实,在考虑到 $F_{u'u'}$

等是連續函数，又关于(35.1)那样的微分方程，定点 a_0 的共轭点是連續地依賴于它的系数，就会明了。或者利用固有值 λ_1 連續地随着系数而变的这一性质也可以証明。

故 Legendre 条件与 Jacobi 条件同时成立，是使 $J[\bar{u}]$ 成为狭义的弱极小的充分条件。但假定了满足 Euler 方程的 $u=\bar{u}(x)$ 是存在的。

这些条件对于极小来說，差不多也是必要的，即至少

$$\bar{F}_{u'u'}\geqslant 0, \qquad a'\geqslant a_1 \tag{35.2}$$

是必要的。若在某一点 x_0 处 $\bar{F}_{u'u'}<0$，则依連續性，对于充分小的 $|\theta|$，在 $x=x_0$ 处就有 $(\bar{F}_{u'u'})_\theta<0$，而依 §33 所述，(34.2) 就不一定成立。又，若是 $a'<a_1$，则对于充分小的 $|\theta|$，对于(34.2)，共轭点就将在 a_1 的左边，仍旧是(34.2)不成立。

上面的条件并不成为强极小的充分条件。为要是强极小，就要求对于 $|\varepsilon\eta(x)|$ 很小，但 $|\varepsilon\eta'(x)|$ 不一定也小的变分，(34.2)是成立的，不过由于(34.4)早已不能成为(34.2)的近似，所以也不能給出任何的結論。

§36 共轭点的几何意义

Jacobi 条件是和 v 的二阶綫性微分方程(35.1)相联系的。如果能求得(35.1)的一般解，那就能判定 Jacobi 条件是否满足。可是在 Euler 微分方程(14.7)的解中，有

$$u=u(x, \alpha) \tag{36.1}$$

这样的含一个任意常数 α 的解，对于 α 的某个值 $\bar{\alpha}$，如果有

$$u(x, \bar{\alpha})=\bar{u}(x),$$

则

$$v=u_\alpha(x, \bar{\alpha}) \tag{36.2}$$

就是 Jacobi 微分方程的解。这也就是說，只要用微分运算就能求

得 Jacobi 方程的解。

要驗証这一点，只需将(36.1)代入 Euler 方程(14.7)，于是得到一恒等式，故可把它对 α 微分。注意到可以交换关于 x 与 α 的微分的顺序，就有

$$F_{uu}u_\alpha + F_{uu'}u'_\alpha - \frac{d}{dx}(F_{u'u}u_\alpha + F_{u'u'}u'_\alpha) = 0,$$

换一个写法就得到

$$\left(F_{uu} - \frac{d}{dx}F_{u'u}\right)u_\alpha - \frac{d}{dx}(F_{u'u'}u'_\alpha) = 0.$$

若取 $\alpha = \bar{\alpha}$，則 $v = u_\alpha$ 就成为(35.1)的解。

如果代替(36.1)的，是含两个任意常数 α, β 的 Euler 方程的解 $u = u(x, \alpha, \beta)$，且若 $u(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \bar{u}(x)$，則 $v = u_\alpha(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 及 $v = u_\beta(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 就是 Jacobi 方程的两个解。能証明它們一般是綫性无关的。

从我們的目的来說，取通过給定点 (a_0, b_0) 的所有的逗留曲綫作为 (36.1) 要便利些。作为参数 α，不妨取 $u'(a_0)$ 的值。因为 $u(a_0, \alpha) = b_0$，故依 (36.2) 有 $v(a_0) = 0$，且 a_0 的共軛点 a' 由作为 a_0 右邻的 $v(x)$ 的零点而确定。

設 $\bar{u}(a') = b'$，則 a', b' 可由下式来决定：

$$u(a', \bar{\alpha}) = b', \quad u_\alpha(a', \bar{\alpha}) = 0 \quad (= v(a')). \tag{36.3}$$

这說明以 (a', b') 为坐标的点 P' 位于曲綫族 $u = u(x, \alpha)$ 的包絡綫❶上，且与这个包絡綫和逗留曲綫 $u = \bar{u}(x) = u(x, \bar{\alpha})$ 的切点相重合。称 P' 为逗留曲綫 $u = \bar{u}(x)$ 上的 $P_0(a_0, b_0)$ 的共軛点。这样，共軛点就具有明显的几何意义。在曲綫 $u = \bar{u}(x)$ 上，点 P_0 与 P_1 之間(包含 P_1)，若无 P_0 的共軛点 P'，則 Jacobi 条件就应当满足。

❶ 在特别的場合，也有包絡綫退化而成为一点的情况。

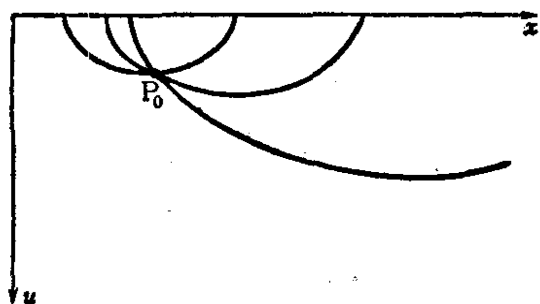


图 36.1

例 1 就§16的例2来說，通过定点 $P_0=(0, 0)$ 的逗留曲綫族（摆綫）互不相交，且无包絡綫。故共軛点不存在，而 Jacobi 条件恒被满足（这在起始点 P_0 即使不是 $(0, 0)$，也是同样的（图 36.1））。故逗留曲綫必給出弱极小。实际上这也是强极小，而且还是最小（§39）。

例 2 就§16的例3来說，通过 $P_0(a_0, b_0)$ 的逗留曲綫族有包絡綫 (16.12)。若 $P_1(a_1, b_1)$ 在这包絡綫的下侧，則通过 P_0，P_1 的逗留曲綫有两条（图 16.2）。其一，即 II，在 P_0，P_1 之間与包絡綫相切，但其他一条即 I 就不相切。对于前者，因为在 P_0，P_1 之間有 P_0 的共軛点 P'，所以 Jacobi 条件不满足。因此这样的逗留曲綫不是极小曲綫。在后一場合，Jacobi 条件满足了，此时 $J[\bar{u}]$ 是弱极小，但实际上也是强极小（§39）。

例 3 对于§16的例4，情况也与前例一样。詳細說明留供讀者作为习题。

§37 逗留曲綫場

为要給出强极小的充分条件，就需要用到所謂逗留曲綫場 (field) 的概念。設有含参变数 α 的一族逗留曲綫 (36.1)，函数 $u=u(x, \alpha)$ 是充分可微的，而且通过 x-u 面的某个区域的各点，都有一条且仅有一条属于这族的曲綫，这时，就称这个逗留曲綫族在所給区域内构成一个場。对 α 給以特定値 $\bar{\alpha}$ 而得的逗留曲綫 $u=u(x, \bar{\alpha})$ 称为**被嵌在这个場中**。

在 x 的某个区間内，若 $u_\alpha(x, \bar{\alpha})\neq 0$，則对于使 $|\alpha-\bar{\alpha}|$ 充分小的 α，(36.1) 的全体构成一个場，而 $u=u(x, \bar{\alpha})$ 就被嵌在这个場中。这依微分学隐函数定理就易証明。利用这一結果，就能証明，在給定了的逗留曲綫 $u=\bar{u}(x)$ 中，如果点 a_0 的共軛点 a' 比 a_1 大些，則在区間 $[a_0, a_1]$ 上，曲綫 $u=\bar{u}(x)$ 被嵌在一个場中。

例 1 在捷綫問題中，例如，頂点在平行于鉛直軸的定直綫上的那些逗留曲綫（擺綫）的全体构成場（图37.1）。全平面都被这个場所复盖。給定了任意的逗留曲綫时，显然能够选取上述的場，使所給逗留曲綫被嵌在这場中。如图 36.1，通过定点 P_0 的逗留曲綫的全体也构成場；但点 P_0 是这个場的奇异点。

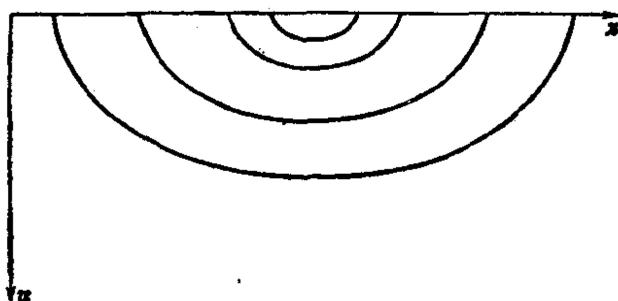


图 37.1

例 2 就抛射体問題（§16，例3）来看，給定的逗留曲綫的弧与包絡綫相切时，就不能作出嵌入这一曲綫的場。但当所給逗留曲綫不与包絡綫相切时，这还是能办到的。象这样即使是一条逗留曲綫，它較短的部分虽然常常能嵌在場中，但伸长到某种程度以上时就办不到了。在极小曲面的問題（§16，例4）中也有同样的情况。

§ 38 Hilbert 不变积分

設 (x, u) 平面的某个区域 D 为一个逗留曲綫場所复盖。因为通过点 (x, u) 而属于这个場的逗留曲綫 $u=u(x, \alpha)$ 可确定，所以它的斜率 $u'=u_x(x, \alpha)$ 也可决定。把它作为 x, u 的函数并記为

$$v=v(x, u). \tag{38.1}$$

依假定 v 是充分可微的函数。称 v 为所考虑的場的**斜率函数**(slope function)。

今在 D 中取两点 $P_0(a_0, b_0)$，$P_1(a_1, b_1)$，并在 D 内取連接这两点的曲綫

$$u=u(x), \tag{38.2}$$

作积分

$$W=W[u]=\int_{a_0}^{a_1}[F(x, u, v)+(u'-v)F_{u'}(x, u, v)]dx, \quad (38.3)$$

这里 $u'=du(x)/dx$，而 v 是代入了(38.1)以后再令 $u=u(x)$ 而得的函数。

(38.3)称为 **Hilbert 不变积分**。我們将說明这个积分的值实际上仅取决于两点 P_0, P_1，而不依賴于連接它們的曲綫 (38.2)。由于(38.3)的被积函数是 u' 的一次式，所以属于退化了的变分問題(§ 20)。(20.1)中的

$$\left.\begin{aligned}M&=F(x, u, v(x, u))-v(x, u)F_{u'}(x, u, v(x, u)),\\ N&=F_{u'}(x, u, v(x, u)).\end{aligned}\right\} \quad (38.4)$$

但

$$\begin{aligned}M_u-N_x&=(F_u+F_{u'}v_u-v_uF_{u'}-vF_{u'u}-vF_{u'u'}v_u)\\ &\quad-(F_{u'x}+F_{u'u'}v_x)\\ &=F_u-F_{u'x}-vF_{u'u}-(v_x+vv_u)F_{u'u'} \quad (38.5)\end{aligned}$$

恰好等于0. 这是因为(38.1)是逗留曲綫的斜率，故依 Euler 方程(15.1)有

$$F_u-F_{u'x}-vF_{u'u}-\frac{dv}{dx}F_{u'u'}=0, \quad (38.6)$$

又 $dv/dx=v_x+v_uv$ 是成立的。

§ 39 Weierstrass E 函数. 极小的充分条件

利用 Hilbert 不变积分，就能用积分的形式表出 $J[u]-J[\bar{u}]$ 的值。如前节所述，(38.3) 的值只依賴于曲綫 (38.2) 的两端点 P_0, P_1，所以如取已嵌在場中的一条逗留曲綫 $u=\bar{u}(x)$ 上的两点作为 P_0, P_1，則沿着这个逗留曲綫計算(38.3)，或者沿着連接 P_0, P_1 的任意曲綫(38.2)計算(38.3)，都会得到相同的結果。但因沿着逗留曲綫 $u=\bar{u}(x)$ 有 $v=\bar{u}'(x)$，所以得到

$$\int_{a_0}^{a_1} F(x, \bar{u}, \bar{u}')\,dx = \int_{a_0}^{a_1} [F(x, u, v) + (u' - v) F_{u'}(x, u, v)]\,dx. \tag{39.1}$$

由此就有表达式

$$J[u] - J[\bar{u}] = \int_{a_0}^{a_1} E(x, u; v, u')\,dx, \tag{39.2}$$

$$E(x, u; v, u') = F(x, u, u') - F(x, u, v) - (u' - v) F_{u'}(x, u, v). \tag{39.3}$$

称 $E(x, u; v, u')$ 为 **Weierstrass 的 E 函数**。若 $u' = v$，則显然 $E = 0$。

只要 $u = u(x)$ 是在場所复盖的区域 D 中的可取曲綫（§17），(39.2) 总是成立的，且不受 $u'(x)$ 近于 $\bar{u}'(x)$ 的限制，故在此情况下討論 $J[\bar{u}]$ 是否为强极小很为便利。若把 x, u, u' 看作独立变数，当 $u' \neq v(x, u)$ 时，恒有

$$E(x, u; v(x, u), u') > 0. \tag{39.4}$$

在此場合，依 (39.2)，当 $u(x) \neq \bar{u}(x)$ 时就有 $J[u] > J[\bar{u}]$，因此 $J[\bar{u}]$ 确实是狹义的强极小值。故在能作出逗留曲綫場的假定下，(39.4) 就是强极小的充分条件。

对 (39.3) 应用 Taylor 定理，就有

$$E(x, u; v, u') = \frac{1}{2}(u' - v)^2 F_{u'u'}(x, u, w). \tag{39.5}$$

此处 w 是 v 与 u' 之間的某个数。因此把 x, u, u' 作为独立变数，若恒有

$$F_{u'u'} > 0, \tag{39.6}$$

則 (39.4) 成立，而 $J[\bar{u}]$ 就成为狹义强极小值。即（同样在場存在的假定下）(39.6) 是强极小的充分条件。

因为我們主要是处理正則的問題，所以假定了 $F_{u'u'} \neq 0$ (19.1)。从而假定了 $F_{u'u'} > 0$ 或 $F_{u'u'} < 0$ 中的一种情况，而 (39.6) 在本质

上并非新的假定。顺便要注意，(39.6) 与 Legendre 条件 (34.5) 并不一样。Legendre 条件是在 $F_{u'u'}$ 中代入了 $u=\bar{u}(x)$，$u'=\bar{u}'(x)$ 以后得出的，它是正的，但 (39.6) 却是在把 x, u, u' 作为独立变数时而成立的，所以是强得多的条件。

此外，如果 (39.6) 中的不等号 >0 换为 $\geqslant 0$，则狭义极小将变为一般的广义极小。

例 1　捷綫問題 (§16，例2)。由以前的討論可知，条件 (39.6) 是滿足的，又能将任意的逗留曲綫嵌于場中 (§37，例1)。故逗留曲綫恒給出狭义的强极小。且因全半平面 $u>0$ 被場所复盖，故此强极小也是狭义最小。到此可以认为捷綫問題已完全解决。

例 2　抛射体問題 (§16，例3)。仍因 (39.6) 是滿足的，故在逗留曲綫能嵌在場中，因而它不与包絡綫相切的情况 (§37，例2) 下，而且只有在这种情况下，就給出狭义的强极小。若 P_1 在包絡綫的下側，則連接 P_0, P_1 的逗留曲綫虽有两条 (§36，例2，图16.2)，但其中与包絡綫不相切的一条 I 才是极小曲綫这一点由此就明了了。这里必須注意，极小并不一定就意味着最小。

試来实际計算极小值 $J[\bar{u}]$. 因为一般在 §16 的例1中，对于 $u=\bar{u}$，有

$$(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}=c^{-1}f(u),$$

故

$$J[\bar{u}]=c^{-1}\int_{a_0}^{a_1}f(\bar{u})^2dx. \tag{39.7}$$

今因 $f(u)=u^{\frac{1}{2}}$，注意到 (16.9)，即得

$$\begin{aligned}J[\bar{u}]&=c^{-1}\int_{a_0}^{a_1}u\,dx\\&=(a_1-a_0)\left\{\frac{1}{12c^3}\left[3\xi^2-3(a_0+a_1)\xi+(a_0^2+a_0a_1+a_1^2)\right]+c\right\}.\end{aligned} \tag{39.8}$$

若将 (16.13) 代入此式并消去 ξ, c，則 $J[\bar{u}]$ 可由 a_0, b_0, a_1, b_1 表出。結果，当 $a_1>a_0$ 时，就有(計算留給讀者。当 $a_1<a_0$ 时，应改变符号)

$$J[\bar{u}]=\frac{2}{3}(b_0+b_1\pm 2d)^{\frac{1}{2}}(b_0+b_1\mp d). \tag{39.9}$$

如 §16 所述，上边的符号相当于曲綫 II。不难看出，取下边的符号时 $J[\bar{u}]$

的值要小些。这并不是由于 $J[\bar{u}]$ 是极小值而立刻断定的，采用下面的办法，就能不依靠計算来說明它。通过 P_0 而斜率比曲綫 II 的斜率小些的逗留曲綫的全体，在曲綫 II 的下側的区域內作成場（在图 16.2 中画了斜綫的部分）。对于这个場应用(39.2)，如果取 I 作为 $u=\bar{u}(x)$，取 II 作为 $u=u(x)$，就会知道 $J[u]>J[\bar{u}]$．此时实际上 II 沿着被場复盖的区域的边界通行，但这个困难借助于簡单的极限移动就能避免掉。

曲綫 I 虽然确实是連接 P_0，P_1 的极小曲綫，但不能立刻判定它就是最小曲綫，其理由是：第一，J 的最小值可能不存在，第二，或許有不連續解也未可知。現在的問題在 $u>0$ 处是正則的，所以在 $u>0$ 的范圍內沒有不連續解，但当曲綫的一部分沿着 x 軸通行时就能产生不連續解。实际上，图 16.2 的折綫 $P_0Q_0Q_1P_1$（叫它是曲綫 III）就是不連續"解"．(虽說是解，但在 x 軸上 Euler 方程不滿足）。事实上，沿着 P_0Q_0，P_1Q_1 那样与 u 軸平行的直綫，虽然 $J[u]$ 本来沒有定义，但把問題作几何学的推广时，也能允許有这样的曲綫，且 P_0Q_0，P_1Q_1 实际就是逗留曲綫(§ 24)。在 Q_0Q_1 上由于 $F=0$，故显然对于 $J[u]$ 的值沒有影响。由于沿着 P_0Q_0，P_1Q_1 的积分(就几何学的解釋来說)分别为

$$\int_0^{b_0} u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}b_0^{3/2},\quad \int_0^{b_1} u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}b_1^{3/2},$$

所以最后对于曲綫 III 就有

$$J[u]=\frac{2}{3}(b_0^{3/2}+b_1^{3/2}). \tag{39.10}$$

这就不允許有 P_0Q_0 那样的鉛直的直綫，以及 x 軸上 Q_0Q_1 那样的奇异綫，因为与曲綫 III 无論怎样接近的曲綫中有能用 $u=u(x)>0$ 的形式来表出的曲綫，所以 $J[u]$ 就应該可以取与(39.10)任意接近的值。

比較一下(39.9)与(39.10)，可知当 d 充分小时（这发生在 P_1 与包絡綫充分接近时），(39.10)要小些，因此极小值(39.9)不給出 J 的最小值。此时，虽然能够知道(39.10)实在是最小值，但这只有在証明了 J 的最小值存在以后才能这样說。若曲綫 III 不能认为是可取的曲綫（按开始的解析問題来說当然就是这样)，则当 d 充分小时，(39.10) 虽然是 J 值的下限，但并不是最小值。当 P_1 位于包絡綫的上側时，情况也是如此。

以上我們从数学的角度出发討論了泛函(16.3)的最小值，作为所謂抛射体运动的力学問題时，能实現的仅有两条逗留曲綫 I，II，而并不是 $P_0Q_0Q_1P_1$ 或与它接近的曲綫。因此，虽然称为"最小"作用原理，但实际上，只有逗留性

是本质的。

例 3 就极小曲面的問題(§16，例4)来說，在定性方面与上述同样的結果是成立的。

§40 最小的充分条件

在某些問題中，有立刻可以看出它的逗留值就是最小值的情况。如果 (34.2) 左边的被积函数在以 η, η' 作为独立变数时是正定的二次形式，則(34.2)确实成立。为此，在以 x, u 及 u' 作为独立变数时只要

$$F_{u'u'}>0, \qquad F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2>0 \tag{40.1}$$

恒成立就够了。第一个不等式与 Weierstrass 的充分条件相同。当(40.1)成立时，对于所考虑的逗留曲綫 $\bar{u}$，即使不研討它是否能嵌在場中，依(34.2)也能直接知道 $J[\bar{u}]$ 給出最小值(此时因为共轭点并不存在，所以逗留曲綫实际可嵌在場中)。并且这結論无論对于固定端或自由端都同样成立。但在这里，我們都假定了逗留曲綫是存在的。

有这样的情形，那就是(40.1)虽然不是直接满足，但通过适当的变换，可以把問題归結为满足(40.1)的情形。

例 正象在前节例2中所看到的，对于抛射体的問題，因为逗留曲綫不一定給出最小值，所以 (40.1) 当然不能滿足。对于捷綫的問題将会怎样呢？实际計算一下就有

$$F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2=\frac{1}{4}u^{-3}(3-u'^2)(1+u'^2)^{-1}, \tag{40.2}$$

可見(40.1)仍旧是不滿足。

然而施行因变数的变换，命

$$u=\frac{w^2}{4}, \tag{40.3}$$

由于 $u'=ww'/2$，就有

$$I[w]=J[u]=\int u^{-\frac{1}{2}}(1+u'^2)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{\frac{1}{2}}dx. \tag{40.4}$$

若将最后的被积函数記为 $G(w, w')$，就有

$$\left.\begin{aligned} G_{w'w'} &= \frac{4}{w^2}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-\frac{3}{2}}>0, \\ G_{ww}G_{w'w'}-G_{ww'}^2 &= \frac{32}{w^6}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-2}>0. \end{aligned}\right\} \quad (40.5)$$

而(40.1)就滿足了。因此能作出結論，即对于捷綫問題，逗留值本身就是最小值。

§41 凸 泛 函

当(40.1)或者稍弱的条件

$$F_{u'u'}\geqslant 0, \qquad F_{uu}F_{u'u'}-F_{uu'}^2\geqslant 0 \quad (41.1)$$

满足时，函数 $F(x, u, u')$ 作为两变数 u, u' 的函数，是凸函数，从而，把 $u(x)$，$u'(x)$ 看作是两个独立的函数时，

$$J[u, u']=\int_{a_0}^{a_1}F(x, u, u')dx \quad (41.2)$$

就成为**凸泛函**。它的意义与(11.1)相同，那就是对于 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，总有

$$J[\alpha u+(1-\alpha)v, \alpha u'+(1-\alpha)v'] \\ \leqslant \alpha J[u, u']+(1-\alpha)J[v, v']. \quad (41.3)$$

为了証明这一关系式，与 §11 一样，只要証明下式就可以了：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}J[tu+(1-t)v, tu'+(1-t)v']\geqslant 0. \quad (41.4)$$

从(41.2)就可看出上式的左边是

$$\int[(F_{uu})(u-v)^2+2(F_{uu'})(u-v)(u'-v')+(F_{u'u'})(u'-v')^2]dx.$$

由此依假定就能得出(41.4)。此处 (F_{uu}) 等表示

$$F_{uu}(x, tu+(1-t)v, tu'+(1-t)v')$$

等。

§42 相反定理

在前节中我們把 $u(x)$，$u'(x)$ 看成全然不同的函数，而考虑了它們的泛函 $J[u, u']$。如在这里加上綫性附加条件

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx}, \tag{42.1}$$

并記 $J[u, u'] = J[u]$，这就是以前考虑过的泛函。在这个意义上，普通的变分問題可說都是**附有条件的变分問題**。

因此，不难想象，正如在 §12 中所考虑过的一样，成立着最大最小的相反性的关系。即以 $J[u]$ 的最小值作为最大值的泛函 $I[v, v']$ 是存在的。这只要把 §12 的結果推广到泛函的場合就能得到。特别要注意 §12 的矢量 $\boldsymbol{u}$ 在这里相当于两个函数的对 $\{u(x), u'(x)\}$.

为簡单起見，考虑固定端的情形，此时，附带条件除 (42.1) 之外，更要求 $u(a_0) = b_0$, $u(a_1) = b_1$. 今設决定了一个满足这边界条件的函数 $f(x)$，并令

$$u = f(x) + u_0(x), \quad u' = \frac{df}{dx} + u_0'(x), \tag{42.2}$$

于是 u_0, u_0' 应該满足的附带条件就成为

$$u_0' = \frac{du_0}{dx}, \qquad u_0(a_0) = u_0(a_1) = 0. \tag{42.3}$$

这样的对 $\{u_0, u_0'\}$ 的全体构成一个矢量空間 $\boldsymbol{M}$. 它相当于 §12 的矢量空間 $\boldsymbol{M}$，而"矢量"$\{f, df/dx\}$ 就相当于 §12 的矢量 $\boldsymbol{a}$.

与 (12.5) 相平行，取

$$I[v, v'] = J[v, v'] - \int_{a_0}^{a_1}\Big[F_v(x, v, v')(v - f) + F_{v'}(x, v, v')\Big(v' - \frac{df}{dx}\Big)\Big]dx \tag{42.4}$$

作为相反泛函 $I[v, v']$. 在 § 12 中曾有一个附带条件，那就是对于矢量 $\boldsymbol{v}$, grad $J(\boldsymbol{v})$ 属于子空間 N, 卽与 $\boldsymbol{M}$ 正交，与此相应，在这里引入"矢量"$\{F_v, F_{v'}\}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 正交的条件。这意味着对于满足(42.3)的所有的$\{u_0, u_0'\}$，恒有

$$\int (F_v u_0 + F_{v'} u_0') \, dx = 0. \tag{42.5}$$

因为这个条件刚巧与(14.5)相同，所以 v, v' 应該满足的附带条件就是 Euler 方程

$$F_v = \frac{d}{dx} F_{v'}. \tag{42.6}$$

注意到这一点，于是(42.4)中含有 f 的部分就可分部积分，并注意 $f(a_0) = b_0$ 等，就有

$$I[v, v'] = \int_{a_0}^{a_1} (F - vF_v - v'F_{v'}) \, dx + b_1 (F_{v'})_1 - b_0 (F_{v'})_0. \tag{42.7}$$

这里 F 表示 $F(x, v, v')$，又 $(F_{v'})_0$ 表示 $F_{v'}(a_0, v(a_0), v'(a_0))$.

这样一来，$J[u]$ 的最小值就等于在附加条件 (42.6) 之下的泛函(42.7)的最大值。这称为**相反定理**。在这里应特别注意 v 与 v' 是不相干的函数，并不是从开始就要求它們适合 $v' = dv/dx$ 的关系。代替它的是要附加(42.6)这样的条件。

§ 43 Friedrichs 变换

添上附带条件(42.6)而使(42.7)成为最大的变分問題，虽然与古典的問題(13.3)在形式上頗有差异，但是能使之成为(13.3)的形式。对此，根据所謂 Legendre 变换

$$p = F_{v'}, \quad p' = F_v, \tag{43.1}$$

导入新的变数 p, p'. 如果(40.1)被滿足，或者更一般的，若是

$$F_{uu} F_{u'u'} - F_{uu'}^2 \neq 0, \tag{43.2}$$

则能对 v, v' 来解(43.1)。作函数

$$\Phi(x, p, p') = vF_v + v'F_{v'} - F = vp' + v'p - F, \qquad (43.3)$$

并将它代入(42.7),就得

$$I[v, v'] = I[p]$$
$$= -\int_{a_0}^{a_1} \Phi(x, p, p')\,dx + b_1 p(a_1) - b_0 p(a_0). \qquad (43.4)$$

条件(42.6)成为

$$p' = \frac{dp}{dx}, \qquad (43.5)$$

(预先利用了它，故将(43.4)简写成 $I[p]$)。这样，$I[v, v']$ 的最大值問題就化成泛函 $I[p]$ 的最大值問題，在此因为 $p' = dp/dx$，所以取得与古典問題(13.3)相同的形式。这样的变换称为 **Friedrichs 变换**。

在 (43.4) 的右边虽然有不参与积分的項，但对于 (43.4) 的 Euler 方程

$$\Phi_p - \frac{d}{dx}\Phi_{p'} = 0 \qquad (43.6)$$

并无影响，而只与自然边界条件有关。这里的自然边界条件，只要回顾一下它的引出过程(§ 25)，就会立刻知道是

$$(\Phi_{p'})_1 = b_1, \qquad (\Phi_{p'})_0 = b_0. \qquad (43.7)$$

Legendre 变换 (43.1), (43.3) 关于 v, v'; p, p' 完全是对称的。因为

$$d\Phi = dv \cdot p' + v dp' + dv' \cdot p + v'dp - F_v dv - F_{v'} dv' = v dp' + v'dp,$$

故对于(43.1)下式成立:

$$\Phi_p = v', \quad \Phi_{p'} = v. \qquad (43.8)$$

所以关于 p 的 Euler 方程 (43.6) 与自然边界条件 (43.7) 就是关于 u 的附带条件(42.1)与(13.4)。反过来，关于 u 的 Euler 方程(42.6)就是关于 p 的附带条件(43.5)。

Friedrichs 变换实际上郎使沒有条件 (41.1) 也能施行，只要假定(43.2)就够了。但一般說来，最小值，最大值这些性质却失掉了，只是 $J[u]$ 与 $I[p]$ 具有相同的逗留值，而逗留函数由上述关系来表出的事实是成立的。

例 試对 § 40 例中改变了形式的捷綫問題(40.4)施行 Friedrichs 变换。解出

$$p'=G_w=-\frac{4}{w^3}\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad p=G_{w'}=w'\left(\frac{4}{w^2}+w'^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{43.9}$$

就有

$$\left.\begin{aligned} &w=2^{\frac{1}{2}}(1-p^2)^{\frac{1}{4}}(-p')^{-\frac{1}{2}}, \quad w'=2^{\frac{1}{2}}p(1-p^2)^{-\frac{3}{4}}(-p')^{\frac{1}{2}}, \\ &G=2^{\frac{1}{2}}(1-p^2)^{-\frac{3}{4}}(-p')^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{43.10}$$

从而有

$$\Phi=-2^{\frac{3}{2}}(1-p^2)^{\frac{1}{4}}(-p')^{\frac{1}{2}}. \tag{43.11}$$

不用說，p, p' 的变域只能是

$$-1\leqslant p\leqslant 1, \quad p'<0. \tag{43.12}$$

§ 44 多个函数的場合

在这一章中，虽然迄今专門处理了仅含单变数 x 的一个函数 u 的一阶导函数的泛函(13.3)，但大部分結果都能推广到含有两个以上函数 $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ (把它們概括起来記为 $\boldsymbol{u}(x)$) 的形如(21.1)的泛函的場合。这时，Legendre 条件(34.5)变为矩陣

$$(\bar{F}_{u_i'u_k'}) \tag{44.1}$$

是正值矩陣这样的条件。又共軛点的概念也可与前同样来定义，而 Jacobi 条件就是弱极小的充分条件。通过 $(n+1)$ 維空間内給定点 $x=a_0$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0$ 的逗留曲綫的全体，是含有 n 个参数

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

的曲綫族

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)=\boldsymbol{u}(x, \boldsymbol{\alpha}), \tag{44.2}$$

从它的 Jacobi 行列式为 0 的条件，即

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)}=0 \tag{44.3}$$

与(44.2)共同确定的点是逗留曲綫(44.2)上的共軛点，当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 变化时，这样的点的軌迹一般是曲綫族(44.2)的包絡面，而共軛点就是逗留曲綫与这个包絡面的切点。

所謂逗留曲綫場及它的斜率函数 $\boldsymbol{v}(x, \boldsymbol{u})$ 的概念也可与前同样定义。又，Hilbert 不变积分由下式定义：

$$W=\int_{a_0}^{a_1}[F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})+\sum_i(u_i'-v_i)F_{u_i'}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})]dx. \tag{44.4}$$

可是这时对于任意的場，W 仅依賴于曲綫 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ 的两端点的定理不再成立。有这种性质的場称为 **Mayer 場**。通过定点 $x=a_0$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0$ 的逗留曲綫的全体，在与包絡面不相切的范圍中构成 Mayer 場（証明見 § 50）。利用这个性质也能与前同样来討論 Weierstrass 的充分条件。Weierstrass 函数由下式定义：

$$E(x, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}')=F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')-F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) -\sum(u_i'-v_i)F_{u_i'}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{44.5}$$

条件(39.6)換为矩陣

$$(F_{u_i'u_k'}) \tag{44.6}$$

恒为正值的条件。

和 § 40 中所討論的最小的充分条件 (40.1) 相对应的，是由記号

$$\begin{pmatrix}(F_{u_iu_k}) & (F_{u_iu_k'})\\ (F_{u_i'u_k}) & (F_{u_i'u_k'})\end{pmatrix} \tag{44.7}$$

所表示的 $2n$ 行 $2n$ 列矩陣为正值的这样一个条件。对于(41.1)也是同样的，与此相应，§ 41 以下的討論都很容易加以推广。詳細的叙述姑予省略，但对此有兴趣的讀者自己来尝試也不会感到特殊的困难。

习　　题

1．証明当(13.3)的逗留函数中，已得到含有两个参数的 $u=u(x, \alpha, \beta)$ 时，通过定点 $P_0(a_0, b_0)$ 的逗留曲线族的包絡綫只須从

$$u(x, \alpha, \beta)=u, \quad u(a_0, \alpha, \beta)=b_0,$$

$$u_\alpha(a_0)u_\beta(x)-u_\beta(a_0)u_\alpha(x)=0$$

中消去 α, β 就能求得，并将此应用到§16的諸例中。

2．在抛射体問題(§16，例3)中，求通过 $P_0(a_0, b_0)$ 与 $P_1(a_1, b_0)$ 的两条逗留曲綫上的 P_0 的共軛点的坐标。

3．在同一問題中，通过 P_0 的任意的逗留曲綫 C 上的 P_0 的共軛点設为 P'，証明在 P_0 与 P' 处所引的 C 的切綫在 x 軸上相交，并利用这来描述求 P' 的作图法。

4．与前題完全相同的結論对于例4同样也成立。更一般的，对于第2章习題8的場合也成立。試証明之。

5．計算图37.1的場的斜率函数(用 θ 作为参数来表出)。

6．关于第2章問題7，試論述共軛点，場，极小条件，Friedrichs 变换等。

7．在§16的例1中，当 $f(u)=u^k$ 时，施行了象§40的例題中的变换以后，应用 Friedrichs 的变换。为要相反定理成立，試确定 k 的値。

8．利用(43.11)来作(43.4)的 Euler 方程，并将它解出。

9．对于二变数 x, y 的問題(23.1)，試討論相反定理，并将它应用于

$$J[u]=\int_G (1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}} dx\,dy.$$

第5章 Hamilton-Jacobi 理論

在本书中，虽然不能討論物理学方面的种种变分原理，但是因为在分析力学中出現的 Hamilton-Jacobi 理論在数学上特别重要，所以在这里介紹一下它的要点，同时还討論測地綫。

§45 通过定点的逗留曲綫場

在这一章中将处理含有 x 的函数 $u_1, \cdots, u_n$ 的泛函 (21.1)。如果象在前节那样記 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$，則这一泛函，在形式上将取(13.3)的形式：

$$J[\boldsymbol{u}]=\int F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')\,dx. \tag{45.1}$$

Euler 方程为(21.4)：

$$\frac{d}{dx}F_{u'_i}=F_{u_i} \quad (i=1, \cdots, n). \tag{45.2}$$

設正則性条件(21.5)：

$$\det(F_{u'_i u'_k})\neq 0 \tag{45.3}$$

已满足。

逗留曲綫 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ 是 $(n+1)$ 維空間 R_{n+1} 中的曲綫。从微分方程的解的一般性質，就能得出这样的結論：通过定点

$$P_0: \quad x=a_0, \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0 \tag{45.4}$$

的逗留曲綫的全体至少在 P_0 的附近作成場。故能用属于这个場的逗留曲綫来連接 P_0 与 P_0 附近的点

$$P_1: \quad x=a_1, \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1 \quad (a_1>a_0), \tag{45.5}$$

而且这种連接方法是唯一确定的。我們将用

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x;\, a_1, \boldsymbol{b}_1) \quad 即 \quad u_i=u_i(x;\, a_1, \boldsymbol{b}_1) \tag{45.6}$$

来表示这条逗留曲綫。把这个逗留函数代入(45.1),并从 a_0 到 a_1 积分后(如果将 P_0 固定)得到 P_1 的函数，記为 $W(a_1, b_1)$，相应于物理学問題的性质,称它为 **Hamilton 主函数或特性函数**，或**描影**(Eikonal)。一般說来，当 P_0 也变化时，W 可看作是 P_0 与 P_1 的函数,但以下为簡单起見,把 P_0 固定下来。

例 对于 § 16 的例 2 来說，$n=1$，若将 (16.13) 代入 (16.9) 就能得出 (45.6) 的 u。即

$$u=u(x;\ a_1,\ b_1)=\frac{b_0+b_1-2d}{(a_1-a_0)^2}\left[x-\frac{(a_0b_1+a_1b_0)-(a_0+a_1)d}{b_0+b_1-2d}\right]^2$$

$$+\frac{(a_1-a_0)^2}{4(b_0+b_1-2d)},\quad 2d=[4b_0b_1-(a_1-a_0)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (45.7)$$

这里，取 (16.13) 的复号的下边的符号。这是因为它相当于构成場的逗留曲綫族 I. $W(a_1, b_1)$ 就是 (39.9)：

$$W(a_1,\ b_1)=\frac{2}{3}\ (b_0+b_1-2d)^{\frac{1}{2}}(b_0+b_1+d). \quad (45.8)$$

§ 46 特性函数的微分系数

以下把 W 叫做特性函数。試求 $W(a_1, b_1)$ 的微分系数。$W(a_1;\ b_1)$ 虽是将 (45.6) 代入 (45.1) 以后所得到的，但注意到积分的上限为 a_1，就有

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=F(a_1,\ \boldsymbol{u}(a_1;\ a_1,\ \boldsymbol{b}_1),\ \boldsymbol{u}'\ (a_1;\ a_1,\ \boldsymbol{b}_1))$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{a_0}^{a_1}\left(F_{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial a_1}+F_{u_i'}\frac{\partial u_i'}{\partial a_1}\right)dx. \quad (46.1)$$

这里，u_i' 虽然是由 (45.6) 中函数 u_i 所作的 $\partial u_i/\partial x$，但是

$$\frac{\partial u_i'}{\partial a_1}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_1}\right),$$

而由于在 (46.1) 的积分中 a_1，$\boldsymbol{b}_1$ 看作是常数，所以也可写

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{d}{dx}.$$

如果将这一项分部积分，则依 Euler 方程(45.2)，积分就成为 0，而仅剩下边界值。因为 (45.6) 通过定点 P_0，所以在 $x=a_0$ 处有 $\partial u_i/\partial a_1=0$，从而最后得

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=(F)_{a_1}+\sum_{i=1}^{n}\left(F_{u_i'}\frac{\partial u_i}{\partial a_1}\right)_{a_1}. \tag{46.2}$$

此处 $(F)_{a_1}$ 是 (46.1) 第一项的略記，$(F_{u_i'}\partial u_i/\partial a_1)_{a_1}$ 的意义也一样。同样可得

$$\frac{\partial W}{\partial b_{1k}}=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{u_i'}\frac{\partial u_i}{\partial b_{1k}}\right)_{a_1}. \tag{46.3}$$

另一方面，由于(45.6)通过 P_1，故下式成立：

$$b_{1i}=u_i(a_1;\ a_1,\ \boldsymbol{b}_1). \tag{46.4}$$

若将它对 a_1, $\boldsymbol{b}_1$ 微分，则

$$0=(u_i')_{a_1}+\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_1}\right)_{a_1},\quad \delta_{ik}=\left(\frac{\partial u_i}{\partial b_{1k}}\right)_{a_1}. \tag{46.5}$$

利用这些关系，(46.2)，(46.3)就变为

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=\left(F-\sum_{i=1}^{n}u_i'F_{u_i'}\right)_{a_1},\quad \frac{\partial W}{\partial b_{1i}}=(F_{u_i'})_{a_1}. \tag{46.6}$$

在此式中将 a_1, $\boldsymbol{b}_1$ 分别改写成 x, $\boldsymbol{u}$ 时，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=F(x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})-\sum_{i=1}^{n}v_iF_{v_i}(x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}),\\ \frac{\partial W}{\partial u_i}&=F_{v_i}(x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}).\end{aligned}\right\} \tag{46.7}$$

这里把 u_i' 换成了 v_i。回顾 (46.6) 右边的意义，那么这 v_i 是 x, $\boldsymbol{u}$ 的函数，而且就表示通过点 x, $\boldsymbol{u}$ 的場中曲綫斜率的斜率函数(§38)。

例 就前节中考虑过的例子来說，注意到(45.8)中 d 是 a_1, b_1 的函数，就有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial a_1}&=\frac{1}{2}(a_1-a_0)(b_0+b_1-2d)^{-\frac{1}{2}},\\ \frac{\partial W}{\partial b_1}&=(b_1-d)(b_0+b_1-2d)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{46.8}$$

試来討論此式是否滿足(46.6)。依(16.4)，$F-u'F'=c$，又因

$$F=f(u)(1+u'^2)^{\frac{1}{2}},$$

故

$$F_{u'}=f(u)(1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}u'=cu',$$

依(16.9)就有 $F_{u'}=(x-\xi)/2c$，把(16.13)的 c 代入，則有

$$\left.\begin{aligned} F-u'F_{u'}&=\frac{1}{2}(a_1-a_0)(b_0+b_1-2d)^{-\frac{1}{2}},\\ (F_{u'})_{a_1}&=\frac{a_1-\xi}{2c}=(b_1-d)(b_0+b_1-2d)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{46.9}$$

它們分別与(46.8)相一致。

§ 47 Legendre 变換

在(46.7)中 $\boldsymbol{v}$ 作为所考虑的場的斜率函数，虽然随着場的不同(从而 P_0 也不同)而改变，但若从(46.7)消去 $\boldsymbol{v}$，結果就得到 W 的偏微分方程，它的形式仅取决于 F 的形式而不依賴于特殊的場。

因为这个消去过程是形式上的操作，所以把 x, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 作为独立变数来处理就可以了。为此，施行 Legendre 变換

$$F_{v_i}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=p_i, \tag{47.1}$$

$$\sum_i v_ip_i-F=H=H\ (x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \tag{47.2}$$

很为便利。这个 Legendre 变換与 § 43 中會用过的不同。在 § 43 中 u, u' 两者都参与变換，但在这里仅有关系 $u'=v$，而把 u 看成参变数了。从 (47.1) 解出 $\boldsymbol{v}$，把 $\boldsymbol{v}$ 看作 x, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ 的函数，将它代入(47.2)，則 H 就可看成是 x, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ 的函数。因为依正則性的假定，(47.1)的 Jacobi 行列式不为 0，所以这是可能的。

Legendre 变換具有相反性，它的逆变換能以完全同样的形式来施行。因为依(47.1)，(47.2)有

$$\begin{aligned} dH&=\sum(v_idp_i+p_idv_i)-\sum(F_{u_i}du_i+F_{v_i}dv_i)\\ &=\sum(v_idp_i-F_{u_i}du_i), \end{aligned}$$

故得

$$H_{p_i}=v_i,\quad \sum p_i v_i - H = F. \tag{47.3}$$

这是与(47.1)，(47.2)有完全同样形式的变换。从而便得

$$H_{u_i} = -F_{u_i}. \tag{47.4}$$

从(46.7)消去 $\boldsymbol{v}$ 的工作将在 §49 中介紹。

在分析力学中，x 表示时間，$\boldsymbol{u}$ 表示一般坐标，而 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$, F, H 分别表示速度，动量，Lagrange 函数，Hamilton 函数。

例 对于(16.3)有

$$p=F_v=f(u)v(1+v^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{47.5}$$

解之(設 $f(u)>0$)得

$$v=p(f(u)^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{47.6}$$

从而

$$H=-(f(u)^2-p^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{47.7}$$

§48 典 型 方 程

利用 Legendre 变换(47.1)，(47.2)，可将 Euler 方程(45.2)换一个写法。在这些式子中若取逗留函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ 作为 $\boldsymbol{u}$，取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}'(x)$ 作为 $\boldsymbol{v}$，注意到(47.3)，(47.4)，就能得出

$$\frac{du_i}{dx}=H_{p_i},\quad \frac{dp_i}{dx}=-H_{u_i}. \tag{48.1}$$

这样一来，逗留条件便可作为 $2n$ 个函数 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ 的一阶微分方程組来表达，而它的形式是关于 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ 对称的。(48.1) 称为 Hamilton 的**典型方程**(canonical equation)。

如果利用 Legendre 的逆变换，則容易从(48.1)回到原来的 Euler 方程(45.2)。

例 就前节的例子来看，(48.1)是

$$\frac{du}{dx}=(f(u)^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}p,\quad \frac{dp}{dx}=(f(u)^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}f(u)f'(u). \tag{48.2}$$

§ 49 Hamilton-Jacobi 方程

利用 Legendre 变换能簡单地完成从 (46.7) 消去 v 的工作。如果比較 Legendre 变換的式子 (47.1), (47.2) 与 (46.7), 則作为消去的結果得

$$\frac{\partial W}{\partial x}+H\left(x, \boldsymbol{u}, \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}}\right)=0, \tag{49.1}$$

詳細写出, 就是

$$\frac{\partial W}{\partial x}+H\left(x, u_1, \cdots, u_n, \frac{\partial W}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial u_n}\right)=0. \tag{49.2}$$

这称为 **Hamilton-Jacobi 方程**, 它是 W 的一阶偏微分方程。

这样一来, 就可明了利用通过定点 P_0 的逗留曲綫場所作的特性函数 W 是滿足与場无关的偏微分方程 (49.2) 的。

例 試驗証 (45.8) 实际上滿足 (49.2)。要求 $\partial W/\partial x$, $\partial W/\partial u$, 只須在 (46.8) 中将 a_1, b_1 代換为 x, u 即得。又 H 的形式只須在 (47.7) 中令 $f(u)=u^{1/2}$ 即得。故有

$$\begin{aligned} H\left(x, u, \frac{\partial W}{\partial u}\right) &= -\left[u-\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\left[u-(u-d)^2(b_0+u-2d)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(x-a_0)(b_0+u-2d)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

它等于 $-\partial W/\partial x$. 在計算中用到 (45.7) 的 $4d^2=4b_0u-(x-a_0)^2$.

其次考虑这个問題的反面, 即給出了滿足 (49.2) 的函数 $W=W(x, \boldsymbol{u})$ 时, 我們将說明利用它能作出逗留曲綫場。为此, 只要解

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial u_i}, \qquad \frac{du_i}{dx}=H_{p_i} \tag{49.3}$$

就可以了。若依第一式确定 $\boldsymbol{p}$ 作为 x, $\boldsymbol{u}$ 的函数, 并将它代入第二式的右边, 就得到 n 个函数 $\boldsymbol{u}$ 的一阶微分方程組, 解出它們, 就应

該得到在 $x, \boldsymbol{u}$ 的空間 R_{n+1} 中的曲綫場。为了說明这实际上是逗留曲綫場，只要能肯定 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$ 滿足典型方程 (48.1) 就可以了。(48.1) 的第一式已經成立。又

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dx} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial u_i} + \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \frac{du_k}{dx} \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial u_i} + \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} H_{p_k},\end{aligned} \tag{49.4}$$

而另一方面，将 W 所满足的式子 (49.2) 对 u_i 微分，就得

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial u_i} + H_{u_i} + \sum H_{p_k} \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_k} = 0, \tag{49.5}$$

所以 (48.1) 的第二式也成立。

§ 50 与 Hilbert 不变积分的关系

玆就前节中由 Hamilton-Jacobi 方程的任意解 W 所作的逗留曲綫場来考虑 Hilbert 的"不变"积分 (44.4)。利用 Legendre 变换可把它写为

$$\int_{a_0}^{a} \left[\sum_i u_i' p_i - H(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})\right] dx. \tag{50.1}$$

这里虽然 $\boldsymbol{p} = \partial W / \partial \boldsymbol{u}$ 是所考虑的場的量 (49.3)，但 u_i' 与 (49.3) 的 du_i/dx 不同，而是沿着所考虑的积分路綫来取的微分。因此利用 Hamilton-Jacobi 方程 (49.2)，则 (50.1) 就成为

$$\int_{a_0}^{a} \left(\sum_i u_i' \frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) dx = \int_{a_0}^{a} dW = W(P) - W(P_0), \tag{50.2}$$

它的值仅依賴于作为积分路綫的曲綫的两端点 P_0, P 而与路綫无关。对于所考虑的逗留曲綫場，Hilbert 不变积分实际上是不变的。换句話說，这个場就是 Mayer 場 (§ 44)。特别是 § 45 中所作的通过定点 P_0 的逗留曲綫場为 Mayer 場的事实由此也就証明了 (§ 44)。

§ 51 Hamilton-Jacobi 定理

如上面所説明的，求出了 Hamilton-Jacobi 方程的一个解 $W(x, \boldsymbol{u})$ 时，就能用以求得一个逗留曲綫場。这是含有 n 个参变数的 ∞^n 度的逗留曲綫族，但因逗留曲綫的全体有 ∞^{2n} 度，所以决不能靠它們来得到所有的逗留曲綫。又从 W 来作这个場时，必須解出微分方程(49.3)。因为它是 n 元一阶微分方程組，虽然較 n 元二阶 Euler 方程 (45.2)，或与此等同的 $2n$ 元一阶典型方程(48.1)为簡单，但实际上，求解还是很麻煩的。

这些困难在求得了 Hamilton-Jacobi 方程的 ∞^n 个解，即含有 n 个参变数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的解

$$W = W(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{51.1}$$

时，就能克服。这时，由于依上述方法能作出 ∞^n 个場，所以能得到 $\infty^n \times \infty^n = \infty^{2n}$ 的逗留曲綫，而在实际上，为了求这个場，并沒有解微分方程(49.3)的必要。

如前节所說明了的，对应于参数值 $\boldsymbol{\alpha}$ 的場，它的 Hilbert 不变积分实际是不变的，而且由下式給出：

$$\int_{a_0}^{a} [F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \sum (u_i' - v_i) p_i] dx$$
$$= W(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}) - W(a_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\alpha}). \tag{51.2}$$

这里場的函数

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}, \qquad v_i = H_{p_i}(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \tag{51.3}$$

依賴于参变数 $\boldsymbol{\alpha}$。另一方面，由于不变性，(51.2)的 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x)$ 只要是满足 $\boldsymbol{u}(a_0) = \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{u}(a) = \boldsymbol{b}$ 的任何函数都可以。因此，設与 $\boldsymbol{\alpha}$ 无关地来取定 $\boldsymbol{u}(x)$，并将(51.2)对 α_k 微分，注意到 $F_{v_i} = p_i$，就有

$$W_{\alpha_k}(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}) - W_{\alpha_k}(a_0, \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\alpha})$$
$$= \int_{a_0}^{a} \sum_i (u_i' - v_i) \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} dx. \tag{51.4}$$

在这样的情况下，再設 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ 是参变数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的場的逗留曲綫，則因 $u_i'=v_i$，所以(51.4)的右边为 0，而有

$$W_{\alpha_k}(a,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\alpha})=W_{\alpha_k}(a_0,\ \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{\alpha}),$$

又因不論 a 是什么值，此式都成立，故沿着这条逗留曲綫，恒有

$$W_{\alpha_k}(x,\ \boldsymbol{u}(x),\ \boldsymbol{\alpha})=\beta_k=\text{常数}\quad(k=1,\ \cdots,\ n).\tag{51.5}$$

反之，对于已給常数組 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_k)$，如果通过解(51.5)而能决定 $\boldsymbol{u}(x)$，那末它就是逗留函数。但这里假定函数行列式不为 0❶，即

$$\det(W_{u_i\alpha_k}(x,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\alpha}))\neq 0.\tag{51.6}$$

对于实际滿足(51.5)的 $\boldsymbol{u}(x)$ 来考察(51.4)，因为左边为 0，故右边也成为 0，而

$$\sum_i(u_i'-v_i)\frac{\partial p_i}{\partial\alpha_k}=0\tag{51.7}$$

沿着这条曲綫到处都成立（p_i，v_i 虽由(51.3)給出，但那里的 u 已由 $u(x)$ 代替了）。可是 $\partial p_i/\partial\alpha_k=\partial^2W/\partial u_i\partial\alpha_k$，因为它們作成的行列式依(51.6)不为 0，所以为要(51.7)成立，就必須 $u_i'=v_i$。这就說明了由(51.5)所决定的 $u=u(x)$ 是逗留曲綫。

上述事实可概括如下：如果得出了含有 n 个参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 Hamilton-Jacobi 方程的解（这称为**完全解**）(51.1)，則另取任意的 n 个常数 $\boldsymbol{\beta}$，并且解(51.5)，若决定了 $\boldsymbol{u}(x)$，就能得到逗留函数。而且任意的逗留函数都能利用这个方法得出。这称为 **Hamilton-Jacobi 定理**。由此要解 Euler 方程(45.2)或典型方程(48.1)，就归結到求偏微分方程(49.2)的完全解。

---

❶ 原来 $(n+1)$ 个变数的偏微分方程(49.1)的解，虽然含有 $(n+1)$ 个任意常数，但因(49.1)不显含 W，所以其中一个 α_0 是以 $W=\cdots+\alpha_0$ 形式相加出現的。由于这样的常数在作(51.6)时就沒有了，所以不发生作用，而仅仅剩下 n 个参变数是有效的。

例 在(47.7)中令 $f(u)=u^{1/2}$ 即得 §16 例3的 Hamilton-Jacobi 方程

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\left[u-\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (51.8)$$

特性函数(45.8)实际滿足上式，这在 §49 的例中已說明了，現在反过来試求(51.8)的完全解。因为(51.8)是变数分离的偏微分方程，故令

$$W=X(x)+U(u)$$

就能求出完全解。于是因

$$X'(x)=[u-U'(u)^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad (51.9)$$

故两边等于常数 α，解之得

$$\left.\begin{aligned} &X=\alpha x, \quad U=\frac{2}{3}(u-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \quad (\alpha>0), \\ &W=\alpha x+\frac{2}{3}(u-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (51.10)$$

作出(51.5)，則

$$x-2\alpha(u-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}=\beta \qquad (51.11)$$

就給出逗留函数。換一个写法就是

$$u=\alpha^2+\frac{(x-\beta)^2}{4\alpha^2}, \qquad (51.12)$$

它与在(16.9)中把 c, ξ 分别改写为 α, β 所得到的相一致。

§52 測 地 綫

Hamilton-Jacobi 定理在分析力学中的应用虽然是特别重要的，但在这里将它应用于測地綫(geodesic)的問題。考慮 Riemann 空間 R_n，設其綫素由正定二次形式

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(\boldsymbol{u})du_i du_k, \qquad g_{ik}=g_{ki} \qquad (52.1)$$

确定。連接 R_n 中两点 P_0: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_0$, P_1: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1$ 的測地綫

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x), \ (0\leqslant x\leqslant 1), \ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{b}_0, \ \boldsymbol{u}(1)=\boldsymbol{b}_1 \qquad (52.2)$$

是作为連接 P_0, P_1 的最短曲綫，即

$$J[\boldsymbol{u}]=\int_0^1 \Big(\sum_{i,k} g_{ik}(\boldsymbol{u})u_i'u_k'\Big)^{\frac{1}{2}}dx \qquad (52.3)$$

的最小曲綫来定义的。

这个变分問題有它的奇异性。测地綫是 R_n 中的曲綫，用参数 x 来表出它的方法有无限多个，而 x, $\boldsymbol{u}$ 空間 R_{n+1} 的逗留曲綫 (52.2) 决非一意地确定。这是由于(52.3)的被积函数是关于 $\boldsymbol{u}'$ 的一次齐次式(参看 § 24)。又，这奇异性在(52.3)不为正則問題时也曾出現过（第2章，問題9）。因此不能保証所有的逗留函数都是二阶可微的。

可是如果假定有二阶可微的逗留函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$，则 Euler 方程仍成立。令

$$Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \sum_{i,k} g_{ik}(\boldsymbol{u}) u_i' u_k', \tag{52.4}$$

則其 Euler 方程为

$$\frac{d}{dx}\left(Q^{-\frac{1}{2}} Q_{u_i'}\right) = Q^{-\frac{1}{2}} Q_{u_i} \quad (i=1, \cdots, n). \tag{52.5}$$

虽然(52.5)就形式来看是复杂的，但利用表出曲綫(52.2)的参数的取法具有任意性这一事实，例如取所考虑的逗留曲綫上的定点 P_0 与动点 P 之間的弧长 P_0P 对全弧长 $P_0P_1=l$ 的比作为 x，那末由于在(52.5)中 $Q=$常数$=l^2$，故得到

$$\frac{d}{dx} Q_{u_i'} = Q_{u_i} \quad (i=1, \cdots, n). \tag{52.6}$$

尽可以把它看作是現在問題中的 Euler 方程。虽然如此，如果解出它所得的結果与条件 $Q=l^2$ 相矛盾，就会发生困难；不过这种担心是不必要的。因为 Q 是关于 u' 的二次齐次式，故依 Euler 定理，下列恒等式成立：

$$\sum_i u_i' Q_{u_i'} = 2Q. \tag{52.7}$$

将(52.6)的解代入此式，并对 x 微分，則有

$$\sum_i \left(u_i'' Q_{u_i'} + u_i' Q_{u_i}\right) = 2\frac{dQ}{dx}. \tag{52.8}$$

但因左边等于 dQ/dx，故有 $dQ/dx=0$，而 Q 实际上就是常数。于是依(52.3)必然有 $Q=l^2$.

§53 化为正則問題的变换

如果观察一下(52.6)的形式，就会知道它是泛函

$$I[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\int Q\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sum_{i,k}g_{ik}(\boldsymbol{u})u_i'u_k'\right)dx \qquad (53.1)$$

的 Euler 方程(因子 1/2 不过是为了方便而加上的)。$J[\boldsymbol{u}]$与 $I[\boldsymbol{u}]$ 虽然是不同的泛函，但却具有相同的 Euler 方程。而对于(53.1)，不仅正則条件(45.3)满足，并且矩陣$(Q_{u_i',u_k'})$是正値的。这是由于綫素(52.1)为正定形式。故在不含共轭点的范圍中，逗留曲綫給出 $I[\boldsymbol{u}]$ 的狹义极小值。

$J[\boldsymbol{u}]$并非正則的問題，对于 $F=Q^{\frac{1}{2}}$，$(F_{u_i'u_k'})$ 虽然不是正値矩陣，但无論如何它是非負的。这是因为，通过簡单的計算，就会知道

$$\sum_{i,k}F_{u_i'u_k'}\xi_i\xi_k=2Q^{-\frac{3}{2}}[(\boldsymbol{u}',G\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{\xi},G\boldsymbol{\xi})-(\boldsymbol{u}',G\boldsymbol{\xi})^2] \qquad (53.2)$$

对于任意的矢量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 恒成立。其中 G 表示矩陣 $(g_{ik}(\boldsymbol{u}))$，而(,)为矢量的内积。因为 G 是正値矩陣，故依Schwarz不等式，(53.2)的[　]内决不会是負的。

因此依§39的結果，逗留曲綫在場存在的范圍内就給出 $J[\boldsymbol{u}]$的广义强极小。至于它不是狹义极小这一点，从同一条 R_n 的測地綫依参数的取法而成为 R_{n+1} 的不同的逗留曲綫这种現象就会明了。作为 R_n 的曲綫，測地綫实际上給出狹义极小，但要說明这点，必需有更詳細的討論。

由于 $J[\boldsymbol{u}]$ 与 $I[\boldsymbol{u}]$ 具有相同的极小函数，所以它們的极小值也有密切的关系。因为沿着极小曲綫 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}(x)$ 已經是 $Q=l^2=$常数，故

$$J[\bar{u}]=l, \qquad I[\bar{u}]=\frac{1}{2}l^2,$$

且下式成立：

$$I[\bar{u}]=\frac{1}{2}J[\bar{u}]^2. \tag{53.3}$$

但在这里表出测地綫的参数 x 是象(52.2)那样在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的区間內变化。虽然 $J[\bar{u}]$ 与参数的取法无关，但 $I[\bar{u}]$ 却不是这样。

若将 x 的范圍取为一般的 $a_0\leqslant x\leqslant a_1$，則因为 $Q=$常数$=c$ 的这种性质不变，故有

$$J[\bar{u}]=c^{\frac{1}{2}}(a_1-a_0), \qquad I[\bar{u}]=\frac{1}{2}c(a_1-a_0),$$

从而得到

$$I[\bar{u}]=\frac{1}{2}(a_1-a_0)^{-1}J[\bar{u}]^2. \tag{53.4}$$

考虑到上面这些事实，就会知道在討論测地綫时，利用正則的而且形式也簡单的 $I[u]$ 来代替奇异的泛函 $J[u]$，在处理上要便利得多。

例　在 n 維 Euclid 空間中，因为

$$ds^2=du_1^2+\cdots+du_n^2, \tag{53.5}$$

故 $Q=\sum u_i'^2$，(52.6)就成为

$$u_i''=0,$$

即

$$u_i=\bar{u}_i=\alpha_i(x-a_0)+b_{0i} \quad (i=1,\cdots,n), \tag{53.6}$$

而测地綫是直綫。对此 $Q=\sum\alpha_i^2$，从而依(53.4)有

$$J[\bar{u}]^2=2(a_1-a_0)I[\bar{u}]=(a_1-a_0)\int_{a_0}^{a_1}Q\,dx=(a_1-a_0)^2\sum\alpha_i^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(b_{1i}-b_{0i})^2=|\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_0|^2. \tag{53.7}$$

但在 $x=a_1$ 时 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}_1$。这是当然的，即它等于两点 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$ 間的“测地距离”的平方。

§ 54 Hamilton-Jacobi 理論在测地綫方面的应用

对于(53.1)的被积函数

$$F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \frac{1}{2}\sum g_{ik}(\boldsymbol{u}) u_i' u_k' \tag{54.1}$$

应用 Legendre 变换(47.1～2)，則($v_i = u_i'$)

$$p_i = \sum_k g_{ik}(\boldsymbol{u}) u_k' \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{54.2}$$

为了就 $\boldsymbol{u}'$ 来解上式，导入矩陣$(g_{ik}(\boldsymbol{u}))$的逆陣$(h_{ik}(\boldsymbol{u}))$，于是

$$u_i' = \sum_k h_{ik}(\boldsymbol{u}) p_k. \tag{54.3}$$

因此

$$H = \sum_i p_i u_i' - F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\ p_i p_k. \tag{54.4}$$

典型方程(48.1)是

$$\frac{du_i}{dx} = \sum_i h_{ik}(\boldsymbol{u}) p_k, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial h_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_i} p_j p_k. \tag{54.5}$$

Hamilton-Jacobi 方程(49.2)是

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial W}{\partial u_i}\ \frac{\partial W}{\partial u_k} = 0. \tag{54.6}$$

此式不显含 x. 在这样的場合，例如令

$$W = \alpha_1^{\frac{1}{2}} \cdot V(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}\alpha_1 x, \tag{54.7}$$

就能求得解。将它代入(54.6)就得到 V 应該滿足的方程

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial V}{\partial u_i}\ \frac{\partial V}{\partial u_k} = 1. \tag{54.8}$$

如果在这个微分方程的解中，能求到含有$(n-1)$个参变数 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的解，那末依(54.7)就能得到含有 n 个参变数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的(54.6)的解。

特别，若把沿着通过定点 $P_0(a_0, b_0)$ 的逗留曲綫积分 $I[\boldsymbol{u}]$ 而

得的特性函数(§45)作为$U(x, \boldsymbol{u})$，則依(53.4)有

$$U=\frac{1}{2}(x-a_0)^{-1}R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0). \tag{54.9}$$

$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)$ 就是点 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{b}_0$ 的测地距离的平方。依§49 U 应該是(54.6)的解。将 U 代入(54.6)，就得到 $R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)$ 满足微分方程

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial R}{\partial u_i}\frac{\partial R}{\partial u_k}=4R \tag{54.10}$$

的結果。因此测地距离

$$r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)=R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)^{\frac{1}{2}} \tag{54.11}$$

本身满足

$$\sum_{i,k} h_{ik}(\boldsymbol{u})\frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{\partial r}{\partial u_k}=1. \tag{54.12}$$

例　就 Euclid 空間来說，依(53.7)有

$$R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}_0)=|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}_0|^2=\sum_i(u_i-b_{0i})^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_i}=2(u_i-b_{0i}),\quad \sum\left(\frac{\partial R_i}{\partial u_i}\right)^2=4\sum(u_i-b_{0i})^2=4R,$$

由于 $g_{ik}(\boldsymbol{u})=\delta_{ik}$, $h_{ik}(\boldsymbol{u})=\delta_{ik}$，所以(54.10)是满足的。

习　　題

1. 証明当 $F(x, u, u')$ 不显含 x 时，典型方程具有 $H=$常数这样的积分。注意(16.1)及第2章問題3是与此等价的。又§52中得到的 $Q=$常数这样的积分也是与此等价的。

2. 証明如果 $W(x, u)$是 Hamilton-Jacobi 方程的解，則依§49的方法由 W 所作成的逗留曲綫場的各曲綫，对于 $W=$常数这样的曲面是横截的。这里，横截性是仿照在一个变数的情形下条件(25.8)来定义的。

3. 对于第2章問題7作 Hamilton-Jacobi 方程，并将它解出。

4. 試决定 Hamilton-Jacobi 方程为如下形式

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial u_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial u_n}\right)^2=f(x, \boldsymbol{u})$$

的 $F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$．注意在 $f(x, \boldsymbol{u})=\varphi(x)+\sum_i\psi_i(u_i)$ 形式之下，能借分离变数

的方法求得上列方程的完全解。

5. 上述关于测地綫的結果，大部分能推广到 $F(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') > 0$ 不含 x，且关于 $\boldsymbol{u}'$ 为齐次的場合。証明若 F 为 $\boldsymbol{u}'$ 的一次齐次式，則

$$J_\alpha[\boldsymbol{u}] = \int_{a_0}^{a_1} F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')^\alpha dx$$

的 Euler 方程对于所有的 $\alpha \neq 1$ 都是等价的，从而具有相同的逗留函数 $\bar{\boldsymbol{u}}$，而 $F(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{u}}') = c$ 是常数，并且下式成立：

$$J_\alpha[\bar{\boldsymbol{u}}] = (a_1 - a_0) c^\alpha.$$

第6章　借变分法的近似計算

在古典变分学中曾有这样的傾向，就是对于泛函 $J[u]$ 的极小(逗留)値来說，毋宁是把重点放在决定逗留函数 $\bar{u}$ 这一工作上。就应用問題来看，虽然也有希望求出逗留値 $J[\bar{u}]$ 的値的場合，但因精确地求 $J[\bar{u}]$ 的値的工作，除了一些特殊情形以外，一般是很困难的，所以求它的近似値就成为重要的問題。这在凸泛函問題中，利用相反定理 (§12, §42) 往往是可能的。在这一章中打算就若干具体問題加以說明。

§55　上界与下界

如果泛函 $J[u]$ 在 $u=\bar{u}$ 时取最小値，则因对于任意的可取函数 u 都有 $J[\bar{u}]\leqslant J[u]$，所以求 $J[\bar{u}]$ 的上界是极簡单的。与此相反，要求 $J[\bar{u}]$ 的下界，一般說来，几乎与求 $J[\bar{u}]$ 的精确値同样困难。不过当 §12, §42 中所述的相反定理成立时，这还是可能的。

为方便計，将 §12 的結果概括为：当函数 $J(\boldsymbol{u})$ 为凸函数时，利用給定的矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量空間 $\boldsymbol{M}$，在附带条件

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{M} \tag{55.1}$$

之下，使 $J(\boldsymbol{u})$ 成为最小的問題，等价于在附带条件

$$\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{M} \tag{55.2}$$

之下，使函数

$$I(\boldsymbol{v})=J(\boldsymbol{v})-(\operatorname{grad} J(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}) \tag{55.3}$$

成为最大的問題，且 J 的最小値与 I 的最大値相等。把它記为 Q，則对于满足(55.1)的任意的 $\boldsymbol{u}$ 与满足 (55.2) 的任意的 $\boldsymbol{v}$，下式都成立：

$$I(\boldsymbol{v}) \leqslant Q \leqslant J(\boldsymbol{u}). \tag{55.4}$$

因此就能容易地求出 Q 的上界 $J(\boldsymbol{u})$ 与下界 $I(\boldsymbol{v})$，且若适当地选取 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，就将得到 Q 的精密的近似值。

以上为方便起見，就 n 个变数 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_n)$ 的函数 $J(\boldsymbol{u})$ 叙述了相反定理，但它可不加改变地推广到函数 u 的凸泛函 $J[u]$. 对于古典泛函(13.3)的应用已在 § 42 中討論过，而对于更一般的泛函显然也可得到同样的結果。

以下就若干例子来看这一方法是怎样应用的。

§ 56 函数的比斜率

考虑二阶常微分方程

$$-(r(x)u')' + p(x)u = 0, \quad a_0 \leqslant x \leqslant a_1, \quad r(x) \neq 0. \tag{56.1}$$

它的满足初始条件

$$u(a_0) = 0 \tag{56.2}$$

的解 $u=\bar{u}(x)$ 除开常数因子外是确定的。 对于这个解 $\bar{u}$，考虑求

$$Q = \frac{r(a_1)\bar{u}'(a_1)}{\bar{u}(a_1)} \tag{56.3}$$

的問題。这个問題与波的散射問題有关。$\bar{u}'(a_1)/\bar{u}(a_1)$ 称为 $\bar{u}(x)$ 在 a_1 处的**比斜率**。(56.3)的因子 $r(a_1)$ 是为了方便而添上的。

这个問題又可叙述如下：对于满足边界条件

$$u(a_0) = 0, \quad u(a_1) = 1 \tag{56.2'}$$

的(56.1)的解 $u=\bar{u}$，試求

$$Q = r(a_1)\bar{u}'(a_1). \tag{56.3'}$$

以下将按这样的形式来处理。

(56.1)是泛函

$$2J[u] = \int_{a_0}^{a_1} [p(x)u^2 + r(x)u'^2]dx \tag{56.4}$$

的 Euler 方程 (§29)。为方便計添上了因子 2. 对于 $u=\bar{u}$ 来説，

如果利用(56.1)，(56.2′)作分部积分，就有

$$2J[\bar{u}]=r(a_1)\bar{u}'(a_1)=Q. \tag{56.5}$$

即所求的量 Q 恰好等于 $2J[\bar{u}]$。

现在假定

$$p(x)>0,\quad r(x)>0, \tag{56.6}$$

于是因为(56.4)的右边，即使把 u, u' 看成是各自无关的函数，也是凸泛函［(40.1)满足］，所以相反定理成立。施行 Friedrichs 变换（§43）（为了避免与系数 $p(x)$ 混淆，把(43.1)的 p, p' 写成 φ, φ'，把 v, v' 写成 u, u'），则因

$$\left.\begin{aligned}&F=\frac{1}{2}(pu^2+ru'^2),\quad \varphi=ru',\quad \varphi'=pu,\\&\Phi=2F-F=F=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right),\end{aligned}\right\} \tag{56.7}$$

故依(43.4)（注意 $b_0=0$, $b_1=1$），由

$$2I[\varphi]=2\varphi(a_1)-\int_{a_0}^{a_1}\left(\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right)dx \tag{56.8}$$

确定的 I 是相反泛函。对于 φ 来說，它没有边界条件的約束。

由于 Q 是 $2J[u]$ 的最小值，$2I[\varphi]$ 的最大值，故对于满足(56.2′)的任意的 u，以及任意的（没有边界条件的）φ，恒有

$$2I[\varphi]\leqslant Q\leqslant 2J[u]. \tag{56.9}$$

因为(56.9)是很簡单的关系，所以就是不用 Friedrichs 的变换公式，也应該能够直接地証明。实际上，对于上面那样的任意的 u, φ，有

$$\begin{aligned}2J[u]-2I[\varphi]&=\int_{a_0}^{a_1}\left(pu^2+ru'^2+\frac{1}{r}\varphi^2+\frac{1}{p}\varphi'^2\right)dx-2\varphi(a_1)\\&=\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(u-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(u'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2+2(u\varphi)'\right]dx-2\varphi(a_1)\\&=\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(u-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(u'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2\right]dx\geqslant 0.\end{aligned} \tag{56.10}$$

故恒有 $2J[u]\geqslant 2I[\varphi]$． 而当 $\varphi'=pu$, $\varphi=ru'$ 成立时，且仅限于此时有 $2J[u]=2I[\varphi]$．这时因为实际上有 $(ru')'=pu$, 即 u 满足 (56.1)，故 $u=\bar{u}$，而这个共同的值就是 Q. 由此立刻得到 (56.9)。

§57 泛函的齐次化

对于 u 来説，虽然要求了象(56.2′)那样的非齐次的边界条件，但对于仅满足 (56.2) 的 $u(x)$，由于 $u(x)/u(a_1)$ 满足 (56.2′)，故若代替(56.4)而取

$$2J_1[u]=\frac{\int_{a_0}^{a_1}[p(x)u^2+r(x)u'^2]dx}{u(a_1)^2}, \tag{57.1}$$

则对于仅满足(56.2)的 u, $2J_1[u]$ 的最小值为 Q.

φ 是完全沒有边界条件的，同时 $I[\varphi]$不是齐次式。然因 $\varphi(x)$ 是可取的，利用任意的数 α 作出的函数 $\alpha\varphi(x)$ 也是可取的，故决定 α 使 $I[\alpha\varphi]$ 成为尽可能的大时，就得到泛函

$$2I_1[\varphi]=\frac{\varphi(a_1)^2}{\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{1}{r(x)}\varphi^2+\frac{1}{p(x)}\varphi'^2\right]dx}. \tag{57.2}$$

从作出 J_1, I_1 的过程就会明了，对于 I_1, J_1, (56.9) 也成立。称 J_1, I_1 为把 I, J 齐次化了的泛函。对于只要求得 Q 的近似值这一目的来説，利用齐次化了的泛函 I_1, J_1 要便利些。然而由于即使将近似函数 u, φ 乘上任意的常数以后，I_1, J_1 仍旧不变，所以如果要决定 φ 使 J 成为最大，就必须回到原有形式来考虑。

例 作为簡单的例，考虑以下的情形：

$$a_0=0,\ a_1=a,\ p(x)=x^{-1},\ r(x)=1. \tag{57.3}$$

令

$$u=\alpha_1\frac{x}{a}+\alpha_2\left(\frac{x}{a}\right)^3,\quad \varphi=\beta_1+\beta_2\frac{x}{a}, \tag{57.4}$$

計算得(注意 $u(0)=0$)

$$2J_1[u]=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right)\alpha_1^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)\alpha_1\alpha_2+\left(\frac{4}{3a}+\frac{1}{4}\right)\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2},\tag{57.5}$$

$$2I_1[\varphi]=\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{a\beta_1^2+a\beta_1\beta_2+\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{2}\right)\beta_2^2}.\tag{57.5'}$$

适当地选取 α_1, α_2 的比使 $2J_1[u]$ 尽可能地小，且适当地选取 β_1, β_2 的比使 $2I_1[\varphi]$ 尽可能地大就可以了。这些不外是二元函数的极値問題。按照第1章問題2，这个問題与§3的問題完全相同，且就(57.5)来說，对于矩陣

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{2} & \frac{1}{a}+\frac{1}{3} & 1 \\ & \frac{4}{3a}+\frac{1}{4} & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}\tag{57.6}$$

如果施行§3的消去法，就能求得 $2J_1[u]$ 的最小值。結果得到

$$Q\leqslant\frac{a^2+18a+24}{6a(a+4)}.\tag{57.7}$$

同样地处理 $2I_1[\varphi]$，就得到

$$Q\geqslant\frac{2(2a+3)}{a(a+6)}.\tag{57.7'}$$

例如令 $a=1$，从上这两个式子就得到

$$1.4285\leqslant Q\leqslant 1.43333,\tag{57.8}$$

其上下界的平均誤差在2%以内。

在近似計算中所用到的(57.4)那样的函数称为**試驗函数**(trial function)。在这里参数 α_1, α_2 等是待定的，它們須这样来确定，使 $J[u]$ 作为 α_1, α_2 的函数成为最小。这样一来，就能使变分法問題归結为普通的函数最小値問題。如果增多参数的数目，其結果必更为精密。

在上面因为(57.5')太簡单了，故对于 φ 若按下式引进三个参数

$$\varphi=\beta_1+\beta_2\frac{x}{a}+\beta_3\left(\frac{x}{a}\right)^2,\tag{57.9}$$

則計算的結果就成为

$$Q\geqslant\frac{3(3a^2+32a+40)}{a(a^2+36a+120)}.\tag{57.10}$$

当 $a=1$ 时有 $Q\geqslant 1.43312$，比(57.8)有了相当的改进(誤差在 0.01% 以内)。

象 (57.4) 或 (57.9) 那样含有綫性形式的参数的試驗函数称为**綫性試驗函数**。将它代入后 $J[u]$，$I[\varphi]$ 就成为参数的二次式，$J_1[u]$，$I_1[\varphi]$ 則成为二次形式的比，但无論是那一个都容易用 § 3 的方法处理。特别当給出了 a 的数值时，就成为单純的数值計算了，若参数的数目增多，計算的工作量就加大，利用計算机計算，在原則上是可能的。

§ 58 对于近似函数的注意

在上述例題中虽曾計算了 $J[\bar{u}]$ 的近似值，但 $\bar{u}$ 的良好的近似函数怎样才能得到呢？例如求出使(57.5)成为最小的 α_1，α_2 的值而代入 (57.4) 时，試考虑 u 在怎样的意义下成为 $\bar{u}$ 的近似函数？

回到沒有齐次化的泛函 J，I 来考虑 (56.10)。如設 $u=\bar{u}$ 为准确的解，又令 $r\bar{u}'=\bar{\varphi}$，而将 $\varphi=\bar{\varphi}$ 代入(56.10)，則因 $2I(\bar{\varphi})=Q$，$\bar{\varphi}'=p\bar{u}$，所以

$$2J[u]-Q=\int_{a_0}^{a_1}[p(u-\bar{u})^2+r(u'-\bar{u}')^2]dx. \tag{58.1}$$

另一方面，在(56.10)中若命 $u=\bar{u}$，則因 $2J[\bar{u}]=Q$，故

$$Q-2I[\varphi]=\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(\bar{u}-\frac{1}{p}\varphi'\right)^2+r\left(\bar{u}'-\frac{1}{r}\varphi\right)^2\right]dx. \tag{58.2}$$

把这两个式子相加再用 2 除，并注意到 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant[(a-b)/2]^2$，則有

$$\frac{1}{2}(2J[u]-2I[\varphi])$$
$$\geqslant\int_{a_0}^{a_1}\left[p\left(\frac{u+\frac{1}{p}\varphi'}{2}-\bar{u}\right)^2+r\left(\frac{u'+\frac{1}{r}\varphi}{2}-\bar{u}'\right)^2\right]dx. \tag{58.3}$$

若我們所用的試驗函数 u，φ 是充分精密的，則 $2J[u]-2I[\varphi]$ 应当是很小的值。由于无論怎样作它都是能計算的量，故記

$$2J[u]-2I[\varphi]=\varepsilon^2 \tag{58.4}$$

时，因(58.1)，(58.2)的和为 ε^2，所以它們每一个都不比 ε^2 大。又(58.3)的左边是 $\varepsilon^2/2$．因此从这些式子首先得到

$$\left.\begin{aligned}&\int p(u-\bar{u})^2dx\leqslant\varepsilon^2,\\&\int p\left(\frac{1}{p}\varphi'-\bar{u}\right)^2dx\leqslant\varepsilon^2,\\&\int p\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{p}\varphi'\right)-\bar{u}\right]^2dx\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2,\end{aligned}\right\}\qquad(58.5)$$

可見 u，$\frac{1}{p}\varphi'$，$\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{p}\varphi'\right)$每一个都是准确解 $\bar{u}$ 的近似函数。在它們中間，一般說来，最后的一个精确度最佳。但所謂近似的意义是指与准确解 $\bar{u}$ 的差的平方乘上 p 以后再积分所得的值很小，即是指**加权 p 的均方近似**。所以 $u(x)-\bar{u}(x)$ 不过能做到平均是 ε 級的。Q 的誤差能求到 ε^2 級，即

$$\left|\,Q-\frac{1}{2}\left(2J[u]+2I[\varphi]\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2.\qquad(58.6)$$

同样的，从(58.1～3)有

$$\left.\begin{aligned}&\int r(u'-\bar{u}')^2dx\leqslant\varepsilon^2,\\&\int r\left(\frac{1}{r}\varphi-\bar{u}'\right)^2dx\leqslant\varepsilon^2,\\&\int r\left[\frac{1}{2}\left(u'+\frac{1}{r}\varphi\right)-\bar{u}'\right]^2dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2},\end{aligned}\right\}\qquad(58.7)$$

而 u'，$\frac{1}{r}\varphi$，$\frac{1}{2}\left(u'+\frac{1}{r}\varphi\right)$每一个都是 $\bar{u}'$ 的近似函数。一般說来，最后的一个精密度最佳。在这里所謂近似的意义是指加权 r 的均方近似。

在这样的意义下，象 u，u' 虽然分別是 $\bar{u}$，$\bar{u}'$ 的近似函数，但要知道近似度 ε，仅靠 $J[u]$ 还是不够的，若在計算时不另外利用 ru' 的近似函数 φ，則 $I[\varphi]$ 就不会知道。u 或許是很好的近似函数，但在实际上要确定它，就需要有其他的近似函数 φ.

因为 u, u' 不过是准确解的均方近似，所以即使 ε 很小，也不保証在每个点 x 处 $u(x)-\bar{u}(x)$ 都很小。忽視这一点就可能发生錯誤。例如在前节的例中，試求使(57.5)成为最小的 $u(x)$. 适当地取常数因子，使得 $u'(0)=1$ 来将 $u(x)$ 規范化，就有

$$u=x+\frac{2}{4-a}x^2. \tag{58.8}$$

可是对于从这个函数所作的比斜率

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{4-a+4x}{(4-a)x+2x^2}, \tag{58.9}$$

幷沒有根据能設它在各点 x 处都接近于准确值 $\bar{u}'(x)/\bar{u}(x)$. "在平均的意义上"，它也許接近于准确值，而它的誤差是 ε 級的。特别在 $x=a$ 处計算(58.9)就得 $(4+3a)/a(4+a)$，而当 $a=1$ 时則为 1.4000。因为已經知道准确的 Q 是由(57.8)表出，所以这个值决不是很好的近似。故用这样的方法来确定近似函数 u，并利用它来計算 $u(a)$, $u'(a)$，再由此算出 $Q=u'(a)/u(a)$，是笨拙的方法。

如果希望知道在每个点处的 $\bar{u}(x)$ 的值，只要象下面这样作就可以了。在(57.7)，(57.7′)中把 a 改写为 x，則 $Q=\bar{u}'/\bar{u}$ 滿足下式：

$$\frac{2(2x+3)}{x(x+6)}\leqslant\frac{\bar{u}'(x)}{\bar{u}(x)}\leqslant\frac{x^2+18x+24}{6x(x+4)}, \tag{58.10}$$

若将它积分，幷用 $\bar{u}'(0)=1$ 加以規范化，就得

$$x\left(1+\frac{x}{6}\right)^3\leqslant\bar{u}(x)\leqslant x\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{3}}e^{\frac{x}{6}}. \tag{58.11}$$

这里若令 $x=1$，就有 $1.588\leqslant\bar{u}(1)\leqslant1.591$，而誤差是 0.1% 級的，对于(58.8)来說就不能得出这样的估值。

作为一般性的原則，象(58.8)那样利用 $J[u]$ 来确定它的近似函数，仅在把它代入泛函 $J[u]$ 的 u 时，才有作为近似函数的作用，而用到其他的目的上是否相宜，則就不一定能有保証。

§59 容　量

作为另一个例，考察放置在电介质中的导体的容量。設布滿三維空間的电介质的介电常数为 $\varepsilon(x,y,z)$，放置于其中的导体的表面为 Γ，导体外部的空間为 G。使这个导体荷电时，在 G 中就

产生了静电場，它的电势 u 在 G 中满足微分方程：

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u)=0, \tag{59.1}$$

在 Γ 上满足边界条件

$$u=k=\text{常数}。 \tag{59.2}$$

导体的全电荷由下列面积分給出：

$$e=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \quad (\nu\ \text{是外法綫}), \tag{59.3}$$

导体的电容量是

$$C=\frac{e}{k}. \tag{59.4}$$

(59.1)就是泛函

$$2J[u]=\int_G (\operatorname{grad} u)^2 \varepsilon\, dx\, dy\, dz \tag{59.5}$$

的 Euler 方程。如果对于满足 (59.2) 的(59.1)的解 $u=\bar{u}$ 来計算 $J[\bar{u}]$，那么施行分部积分就得到

$$\begin{aligned}2J[\bar{u}]&=-\int_{\Gamma} \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\varepsilon\, dS-\int_G \bar{u}\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \bar{u})\,dx\,dy\,dz\\&=4\pi k e=4\pi k^2 C.\end{aligned}$$

因此对于满足(59.2)的 u，

$$2J_1[u]=\frac{1}{k^2}2J[u]=\frac{1}{k^2}\int_G (\operatorname{grad} u)^2 \varepsilon\, dx\, dy\, dz \tag{59.6}$$

的最小值剛巧等于容量 C 的 4π 倍。这实际上是最小值，从(59.5)为凸泛函就可明了。

根据同样的理由，对于这个問題可以应用相反定理。利用 § 42 的方法就可以求出相反泛函。由于問題的齐次性，故不妨令 $k=1$，所以 $J_1=J$ 可写作

$$2J[u, u_x, u_y, u_z]=\int (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\varepsilon\, dx\, dy\, dz, \tag{59.6'}$$

并把 u_x, u_y, u_z 看作独立变数。于是相当于(42.7)的是

$$2I=-\int_G (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz$$

$$+2\int_\Gamma [v_x\cos(\nu,x)+v_y\cos(\nu,y)+v_z\cos(\nu,z)]\,\varepsilon\,dS. \quad (59.7)$$

但在这里因为 v_x, v_y, v_z 是独立函数，并无 $v_x=\partial v/\partial x$ 这样的意义。代替它的是要求滿足相当于(42.6)的附带条件

$$0=\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon v_z). \quad (59.8)$$

因此，如果現在把分量为 εv_x, εv_y, εv_z 的矢量函数記作 $\boldsymbol{v}$，則对于滿足附带条件

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \quad (59.9)$$

的 $\boldsymbol{v}$，泛函

$$2I[\boldsymbol{v}]=-\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}\,dx\,dy\,dz+2\int_\Gamma v_\nu dS \quad (59.10)$$

的最大値应該恰好等于 $4\pi C$ (v_ν 是 $\boldsymbol{v}$ 的法向分量)。按照 §57 的方法，用 $\alpha\boldsymbol{v}$ 来代替 $\boldsymbol{v}$，并求 $I[\alpha\boldsymbol{v}]$ 的最大値，借此将 I 齐次化，就得到

$$2I_1[\boldsymbol{v}]=\frac{\left(\int_\Gamma v_\nu dS\right)^2}{\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}\,dx\,dy\,dz}=\frac{(4\pi e)^2}{\int_G \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}\,dx\,dy\,dz}. \quad (59.10')$$

e 等于 Γ 上的“全电荷”。故由

$$2I_1[\boldsymbol{v}]\leqslant 4\pi C\leqslant 2J_1[u] \quad (59.11)$$

就能求出 C 的上下界。

又此式也能直接驗証。虽然我們可以象 §56 那样証明 $J[u]-I[\boldsymbol{v}]\geqslant 0$，但也可象下面这样做。依(59.9)，因为

$$\operatorname{div} u\boldsymbol{v}=\operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{v}, \quad (59.12)$$

将它积分并利用(59.2)，则有

$$-k\int_\Gamma v_\nu dS=\int_G \operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{v}\,dx\,dy\,dz. \quad (59.13)$$

故依 Schwarz 不等式得到

$$k^2\left(\int_\Gamma v_\nu dS\right)^2 \leqslant \left[\int_G (\operatorname{grad} u)^2 \varepsilon\, dx\, dy\, dz\right] \times \left[\int_G \boldsymbol{v}^2 \varepsilon^{-1}\, dx\, dy\, dz\right]. \tag{59.14}$$

把它与(59.6)，(59.10′)比較，就有 $I_1[\boldsymbol{v}] \leqslant J_1[u]$，由于这一关系对于各个可取的任意的 u, $\boldsymbol{v}$ 都成立，所以得到(59.11)。

对于准确解来說，u 表示靜电势，$\boldsymbol{v}$ 表示电通量密度。近似值 $J_1[u]$ 用到了“靜电势” u，但并不假定 u 滿足場的方程。另一方面，$I_1[\boldsymbol{v}]$ 用到了“电通量密度” $\boldsymbol{v}$，且假定 $\boldsymbol{v}$ 是无源的矢量，但不假定 $\varepsilon^{-1}\boldsymbol{v}$ 具有势。在这样的应用变分法进行的近似計算中，一般的原則是將准确解应該滿足的方程分为两部，然后分别利用仅正确地滿足其中一部，但不必滿足另一部的試驗函数，来得出所求的量的上下界。

上述結果也可推广到两个以上导体的場合。特别是用这个方法可計算两个导体之間的电容量。代替上面的电介质而考虑电导率等于 $\varepsilon(x, y, z)$ 的不完全导体，設放置在其中的两个完全导体之間的电导率为 C_0，則上述結果仍照样成立。但有 $C_0=4\pi C$，而 u 表示电位，$\boldsymbol{v}$ 表示电流密度。因为在这种場合不完全导体可以是有界体，所以也有具有自由边界的情况，而 Γ 不限定为閉曲面。

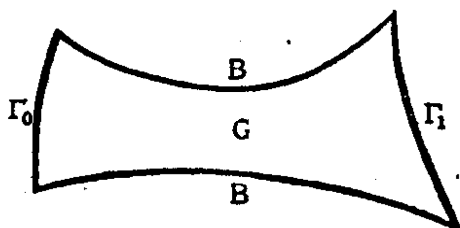


图 59.1

例如在图 59.1 中，G 是不完全导体，B 是自由边界，Γ_0 与 Γ_1 是由完全导体所构成的正負电极。把 Γ_0 的电位看作是 0，而 Γ_1 的电位看作保持定值 k，即設在 Γ_0 上 $u=0$，在 Γ_1 上 $u=k$，如果同上面一样来处理的話，則 $2J_1[u]$ 就給出 C_0 的上界。同样 $2I_1[\boldsymbol{v}]$ 就給出 C_0 的下界，但对于 $\boldsymbol{v}$ 附加了在自由边界上 $v_\nu=0$ 这样的附加条件。又(59.10′)的分子的积分

$\int_{\Gamma}$ 仅在 Γ_0 或 Γ_1 中的一个上来取。

§60 容量的上界

現在来考慮依(59.6)求 $4\pi C$ 的上界时,要用怎样的 u 才好? 虽然取准确解 $u=\bar{u}$,就能得到准确的 $4\pi C$,但这一般来說是办不到的。不过确定了一个函数 $\mu(x, y, z)$ 时,則在可用 $u=f(\mu)$ 的形式表出的函数 u 中,确定最好的 u 是可能的。但在 Γ 上必須是 $\mu=$常数。这种形式的函数都有共同的"等势面"。因此这个方法归結为在假定了設想的等势面的基础上,来求最好的近似。依 $u=f(\mu)$,有 grad $u=f'(\mu)$ grad μ,所以

$$2J_1[u]=\frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2(\text{grad }\mu)^2\varepsilon\,dx\,dy\,dz. \tag{60.1}$$

若把"等势面" $\mu=$常数上的面积元素記为 dS,而相邻两个等势面間的法綫記为 dn,則因 $dx\,dy\,dz=dS\,dn$,且 grad $\mu=d\mu/dn$,故得

$$\begin{aligned}2J_1[u]&=\frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2\left(\frac{d\mu}{dn}\right)^2\varepsilon\,dS\,dn\\&=\frac{1}{k^2}\int f'(\mu)^2\,d\mu\int\varepsilon\,\frac{d\mu}{dn}\,dS.\end{aligned} \tag{60.2}$$

这里

$$j(\mu)=\int\varepsilon\,\frac{d\mu}{dn}\,dS \tag{60.3}$$

是依"等势面" $\mu=$常数而定的 μ 的函数,尽可认为是已知的。所以

$$2J_1[\mu]=\frac{1}{k^2}\int_0^{\infty}f'(\mu)^2j(\mu)\,d\mu. \tag{60.4}$$

但暂时假定在 Γ 上 $\mu=0$,在无限远处 $\mu=\infty$,不过这不是重要的。另一方面,因为在 Γ 上 $f(\mu)=u=k$,且在无限远处 $u=0$,故依 Schwarz 不等式有

$$k^2=\left(\int_0^{\infty}f'(\mu)\,d\mu\right)^2\leqslant\int f'(\mu)^2j(\mu)\,d\mu\int\frac{d\mu}{j(\mu)}, \tag{60.5}$$

从而

$$2J_1[u]\geqslant\frac{1}{\displaystyle\int\frac{d\mu}{j(\mu)}}. \tag{60.6}$$

特别的,若按 $f'(\mu)=1/j(\mu)$ 来取 f 时,則在(60.5)因而又在(60.6)中等号成立。由此

$$4\pi C \leqslant \frac{1}{\int \frac{d\mu}{j(\mu)}}. \tag{60.7}$$

在所考虑的这样形式的函数 $u=f(\mu)$ 中，这是最好的上界。

例 求放置在眞空中($\varepsilon=1$)的棱长为1的立方体的电容量的上界。試取与立方体表面有等距离 μ 的点的軌迹作为"等势面" μ. 于是显然 $d\mu/dn=1$, 故依(60.3), $j(\mu)$ 就是面 μ 的表面积，不难知道有

$$j(\mu)=6+6\pi\mu+4\pi\mu^2. \tag{60.8}$$

由此依(60.7)得

$$C \leqslant \frac{1}{4\pi\int_0^\infty \frac{d\mu}{6+6\pi\mu+4\pi\mu^2}} = \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{6}{\pi}} \Big/ \log\left[\frac{\pi}{6}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{6}{\pi}}\right)^2\right]$$
$$=0.7106. \tag{60.9}$$

§61 容量的下界

当依(59.10′)来求容量的下界时，用到了满足(59.9)的(无源的)矢量函数 $\boldsymbol{v}$. 在上界的計算中曾用到了設想的电位，与此相应，这里就要考虑設想的电通量密度 $\boldsymbol{v}$. 利用"力綫"表示电通量密度要方便些。設給出了一个无源的矢量 $\boldsymbol{v}_0(\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0)$，于是在各点处具有 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向的一束力綫就决定了，而将在各力綫上取定値的函数 $g(\omega)$ 乘 $\boldsymbol{v}_0$ 后作为 $\boldsymbol{v}=g(\omega)\boldsymbol{v}_0$, 則 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ 的性质仍不变 (ω 表示力綫的参变数)。这是因为在 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=g\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0+\operatorname{grad}g\cdot\boldsymbol{v}_0$ 中 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$, 又 $\operatorname{grad}g$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 正交。

假定在这里仅考虑 $\boldsymbol{v}=g(\omega)\boldsymbol{v}_0$ 这样形式的矢量場，而使(59.10′)的値成为最大，那么只要考虑一定的力綫就会給出最好的近似。实际上，要决定这个 g 可象下面这样作。設沿着力綫的长为 dn, 力綫聚集而成的細的力管的断面积为 $d\sigma$, 則有

$$\int \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}\,dx\,dy\,dz=\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_0^2\varepsilon^{-1}\,d\sigma\,dn.$$

由于沿着各力管 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$, 故 $|\boldsymbol{v}_0|d\sigma$ 为定值且等于 $|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma$ (足标 Γ 表示在物体表面 Γ 上的值)。于是 $\boldsymbol{v}_0^2\,d\sigma=\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2\,d\sigma_\Gamma(d\sigma_\Gamma/d\sigma)$, 而

$$\int \boldsymbol{v}^2\varepsilon^{-1}\,dx\,dy\,dz=\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2\,l(\omega)d\sigma_\Gamma. \tag{61.1}$$

但由于

$$l(\omega)=\frac{d\sigma_\Gamma}{d\sigma}\varepsilon^{-1}dn \tag{61.2}$$

在指定了力綫时是确定的量，可以看做是已知的。注意到 $v_\nu dS=g(\omega)v_{0\nu}dS=g(\omega)|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|d\sigma_\Gamma$（注意力綫是假想的，沒有与物体表面正交的必要），則(59.10′)，依(61.1)而成为

$$2I_1[\boldsymbol{v}]=\frac{\left(\int g(\omega)\,|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|\,d\sigma_\Gamma\right)^2}{\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2\,l(\omega)\,d\sigma_\Gamma}. \tag{61.3}$$

因依 Schwarz 不等式有

$$\left(\int g(\omega)\,|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|\,d\sigma_\Gamma\right)^2\leqslant\int g(\omega)^2\boldsymbol{v}_{0\Gamma}^2 l(\omega)\,d\sigma_\Gamma\int\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)}, \tag{61.4}$$

故得

$$2I_1[\boldsymbol{v}]\leqslant\int_\Gamma\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)}. \tag{61.5}$$

所以就这个方法来說，虽不可能得到 $I_1[\boldsymbol{v}]$ 較 (61.5) 的右边为大，但若取 $g(\omega)=1/|\boldsymbol{v}_{0\Gamma}|\,l(\omega)$，則因在(61.4)中等号成立，所以(61.5)右边的值是可能实現的。因此在利用給定了的假想力綫而得的范圍內，

$$4\pi C\geqslant\int\frac{d\sigma_\Gamma}{l(\omega)} \tag{61.6}$$

就是最好的近似值。

例 試用 (61.6) 計算前节例題中立方体的容量的下界。取通过立方体中心的直綫束作为力綫。对此只要設 $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{r}/r^3$ 就可以了。它滿足 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$。取立体角作为 ω。这样一来，因依(61.2)有 $d\sigma_\Gamma/d\sigma=r_\Gamma^2/r^2$，故得

$$l(\omega)=r_\Gamma^2\int_{r_\Gamma}^{\infty}r^{-2}\,dr=r_\Gamma. \tag{61.7}$$

此处 r_Γ 是从中心到立方体表面的距离。因 $d\sigma_\Gamma=r_\Gamma^2\,d\omega$，所以 (61.6) 就給出❶

$$C\geqslant\frac{1}{4\pi}\int r_\Gamma\,d\omega. \tag{61.8}$$

考虑到对称性，沿着立方体的一个面$\left(例如\ z=\frac{1}{2}，中心取作原点\right)$来計算

❶ 实际上这不限定对于立方体成立，即对于任意的凸体也成立。比这更精确的关系是 $C\geqslant\left(\frac{1}{4\pi}\int r_\Gamma^3\,d\omega\right)^{1/3}=\left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{1/3}$（$V$ 是物体的体积）。

上式，就有

$$C\geqslant\frac{6\times8}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_0^{\alpha(\phi)}\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}d\theta,\quad \cos\alpha(\phi)=\frac{\cos\phi}{\sqrt{1+\cos^2\phi}}. \tag{61.9}$$

由此

$$C\geqslant\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left(1+\frac{1}{\cos^2\phi}\right)d\phi=\frac{3}{\pi}\int_0^1\frac{\log(2+t^2)}{1+t^2}dt. \tag{61.10}$$

这个积分虽然不能用有限的形式求出，但从此可得下界

$$C\geqslant0.611. \tag{61.11}$$

根据这一結果要与(60.9)合并而得出精确的C的值还远远不够。此外，利用上述脚注的式子，可得到$C\geqslant0.620$. 对于这样的三維問題，要想借助于簡单的計算而得出良好的近似值是困难的。

§ 62 彈 性 論

相反定理也被应用于彈性論，而得所謂 **Castigliano 定理**。設空間坐标为$x=(x_1, x_2, x_3)$，表示彈性体微小变位的矢量为$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$，于是变形的張量为

$$e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{62.1}$$

彈性能密度W为e_{ik}的函数：

$$W=F(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{31}, e_{12}). \tag{62.2}$$

对于微小变位来說，F可用e_{ik}的正定二次形式表出。它的系数为彈性常数，且一般的是四阶張量，但对于各向同性的均质物体，仅有两个系数是独立的，且取如下的形式：

$$F=\frac{\lambda}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2 +\mu(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2+2e_{23}^2+2e_{31}^2+2e_{12}^2). \tag{62.2'}$$

λ, μ称为 Lamé 常数。

对于体积为G表面为Γ的彈性体，設作用于其每单位面积上的外力已知为$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$，則其全能量为

$$2J[\boldsymbol{u}]=\int_G F dx-2\int_\Gamma \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}\, dS. \tag{62.3}$$

弹性体的平衡状态借 $J[\boldsymbol{u}]$ 成为最小的 $\boldsymbol{u}$ 而达到。这是关于三个变数 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 的三个函数 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$ 的变分問題，虽然是很复杂的，但在本质上，例如与 §59 的問題并沒有什么两样，只是对于 $\boldsymbol{u}$ 不要求边界条件而已。

作 Euler 方程，则有

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}=0. \tag{62.4}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} p_{11}&=\frac{\partial F}{\partial e_{11}}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11}, \cdots, \\ p_{23}&=p_{32}=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial e_{23}}=2\mu e_{23}, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{62.5}$$

自然边界条件由下式給出:

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ik}\cos(x_i, \nu)=p_k. \tag{62.6}$$

其中 ν 表示外法綫。p_{ik} 为应力張量。

因为 F 是正定二次形式，所以即使把 e_{ik} 与表面上的 u_1, u_2, u_3 都看成独立函数，$J[\boldsymbol{u}]$ 也是凸泛函。我們說 e_{ik} 由 (62.1) 給出，而 (62.3) 的第二項 u_i 实际上是內部的 u_i 的边界値，这无非是对于开始当作独立的 e_{ik}, u_i 所要求的綫性附带条件。由此 §12 的相反定理成立。因为現在沒有边界条件，所以这个約束是齐次的，而 §12 的 $\boldsymbol{a}$ 就是 0。由于作 (12.5) 时 $\boldsymbol{u}$ 的一次項失去了，所以結果相反泛函就有如下的形式:

$$2I=\int\left(F-e_{11}\frac{\partial F}{\partial e_{11}}-e_{12}\frac{\partial F}{\partial e_{12}}-\cdots\right)dx=-\int F\, dx. \tag{62.7}$$

在相反問題中，e_{12} 等不能当作由 (62.1) 給出，但要求在代替它的原来的 Euler 方程 (62.4) 及自然边界条件 (62.6) 从开始就作

为附带条件之下使 I 成为最大 (或使 $-I$ 最小)。因此将 (62.7) 的 F 看作是"应力" p_{ik} 的函数是妥当的。即在(62.7)中有

$$F=\frac{1}{4\mu}(p_{11}^2+p_{22}^2+p_{33}^2+2p_{23}^2+2p_{31}^2+2p_{12}^2)$$

$$-\frac{\lambda}{4\mu(3\lambda+2\mu)}(p_{11}+p_{22}+p_{33})^2, \qquad (62.8)$$

而且在(62.4)与(62.6)作为附带条件时使 I 成为最大的应力分布就表示实际的平衡状态。表示成这种形式的变分原理就是 Castigliano 定理。

上面为簡单起見虽曾假定了沒有作用于体积上的外力，也沒有固定的边界部分，但上述結果容易推广到这些一般的場合。

§63 柱体的扭剛性

試将前节的結果应用到刻度的問題上。考虑与 z 軸平行的柱形彈性体。設它在 xy 面的截口是一单連通区域 G. 把这个柱体的下面固定起来，且对上面施加力矩而給与微小的扭变形。因为对側面不施加外力，所以側面的边界条件依(62.6)为

$$p_{xx}x_\nu+p_{yx}y_\nu=0;\ p_{xy}x_\nu+p_{yy}y_\nu=0,\ p_{xz}x_\nu+p_{yz}y_\nu=0. \qquad (63.1)$$

把前面的 x_1, x_2, x_3 写为 x, y, z, 且記 $\cos(x,\nu)=x_\nu$ 等等 (注意在側面上 $z_\nu=0$)。另一方面，由于应力是看作不依賴于 z 的，所以 Euler 方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}p_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}p_{yx}=0,\\ \frac{\partial}{\partial x}p_{xy}+\frac{\partial}{\partial y}p_{yy}=0,\\ \frac{\partial}{\partial x}p_{xz}+\frac{\partial}{\partial y}p_{yz}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (63.2)$$

这些条件当把 $p_{xz}=p_{zx}$, $p_{yz}=p_{zy}$ 以外的分量都取作0时也能满足(由于在上下底面上，都作用了外力的力矩，故不待言这两个不能

成为 0)。于是应該考虑的条件仅是(63.1)和(63.2)中的最后的式子。从(63.2)的最后一式,就会看出象适合

$$p_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad p_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{63.3}$$

的函数 $\psi=\psi(x, y)$ 是存在的。把它代入(63.1)的最后一式中,则在側面 G 的边界 Γ 处就有 $\partial\psi/\partial x:\partial\psi/\partial y=x_\nu:y_\nu$,而 grad ψ 与边界的法綫方向一致。这說明在 Γ 处 ψ 为常数,并且因为这个常数无論是什么,都沒有关系,所以不妨設

$$\text{在 }\Gamma\text{ 处},\quad \psi=0. \tag{63.4}$$

由此,前节的 Castigliano 定理就归結到使

$$2I[\psi]=-\int_G F\,dx\,dy \tag{63.5}$$

成为最大的問題。但要添加如下的附带条件作为边界条件,即設施加的力矩为 1 时,$xp_{yz}-yp_{xz}$ 的积分,即(以下記 $\partial\psi/\partial x=\psi_x$ 等)

$$-\int_G(x\psi_x+y\psi_y)\,dx\,dy=1. \tag{63.6}$$

注意到(63,4)并分部积分,就有

$$2\int\psi\,dx\,dy=1. \tag{63.7}$$

对于均质物体,F 由(62.8)給出,而在現在的場合下,(63.3)以外都是 0,所以(63.5)变为

$$2I[\psi]=-\frac{1}{2\mu}\int_G(\psi_x^2+\psi_y^2)\,dx\,dy. \tag{63.8}$$

因为(63.7)是关于 ψ 的一次条件,所以在这个条件下使(63.8)成为最大的問題,在本质上就等价于使

$$J[\psi]=\frac{\int_G(\psi_x^2+\psi_y^2)dx\,dy}{4\left(\int_G\psi\,dx\,dy\right)^2} \tag{63.9}$$

成为最小的問題。若不計因子 $\frac{1}{2\mu}$,則因 $J[\psi]$ 的最小值 $J[\bar{\psi}]$ 等

于单位力矩作用在圓柱每单位长度上的扭能量，所以 $\mu/J[\overline{\psi}]$ 恰好等于扭剛性 P. 即得到了不等式

$$\mu^{-1}P \geqslant \frac{4\left(\int_G \psi\, dx\, dy\right)^2}{\int_G (\psi_x^2+\psi_y^2)\, dx\, dy}. \tag{63.10}$$

这里 ψ 只要是滿足边界条件(63.4)的任何函数都可以。

如果照例对(63.9)或(63.8)应用相反定理，就得到給出 P 的上界的不等式。在这里我們将更直接地来导出它。取滿足附带条件

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 2 \tag{63.11}$$

的矢量 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$，于是因为

$$\operatorname{div} \psi \boldsymbol{v} = 2\psi + \operatorname{grad} \psi \cdot \boldsymbol{v} \tag{63.12}$$

的左边的积分依(63.4)而成为0，故依 Schwarz 不等式，就得

$$4\left(\int_G \psi\, dx\, dy\right)^2 = \left(\int_G \operatorname{grad} \psi \cdot \boldsymbol{v}\, dx\, dy\right)^2$$
$$\leqslant \int_G (\operatorname{grad} \psi)^2 dx\, dy \int_G \boldsymbol{v}^2\, dx\, dy. \tag{63.13}$$

从而(63.10)的右边不比 $\int \boldsymbol{v}^2\, dx\, dy$ 大。由于(63.10)的右边的最大值为 $\mu^{-1}P$，故得

$$\mu^{-1}P \leqslant \int_G \boldsymbol{v}^2\, dx\, dy. \tag{63.14}$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 只要是滿足(63.11)的任何矢量都可以。

例　試求边长为 $2a$ 的正方形的扭剛性。頂点的坐标設为 $(\pm a, \pm a)$，并令

$$\psi = (a^2-x^2)(a^2-y^2), \tag{63.15}$$

則因边界条件(63.4)滿足，故依(63.10)容易得

$$\mu^{-1}P \geqslant \frac{20}{9} a^4 = 2.22 a^4. \tag{63.16}$$

又設 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}=(x, y)$，則因(63.11)滿足，故依(63.14)有

$$\mu^{-1}P\leqslant\frac{8}{3}a^4=2.67a^4. \tag{63.17}$$

这些上下界虽然还不精确，但因所用的是簡单的試驗函数，故也只能如此。

§64 非綫性問題，Thomas-Fermi 方程

直到現在我們所处理的上下界問題，在形式上都是大同小异，而且 Euler 方程都是綫性的，因此，其共同的特点是研究极值的泛函都是二次的。在非綫性問題中，相反定理成立的情形虽然很多，但所考慮的泛函的最小(大)值在实际上并不重要，因此也沒有方法来求它的近似值。在这一点上，非綫性問題与綫性問題是不同的。而最小値不引起特别兴趣的場合却很多。其中 Thomas-Fermi 方程却是一个例外，它是实际应用相反定理的一例。

中性原子的 Thomas-Fermi 方程为

$$u''=x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}\qquad(0<x<\infty). \tag{64.1}$$

在它的解中满足边界条件

$$u(0)=1;\qquad \lim_{x\to\infty}u(x)=0 \tag{64.2}$$

的解称为中性原子的 Thomas-Fermi 函数。由于(64.1)是非綫性的，所以这种解的存在及唯一性决不是显然的，其証明也并不困难。不过以下将假定这是已知的。

不难知道，(64.1)是泛函

$$2J[u]=\int_0^\infty\left(u'^2+\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{5}{2}}\right)dx \tag{64.3}$$

的 Euler 方程，但对于 u 附有边界条件(64.2)。因为(64.3)的被积函数 $2F(x,u,u')$ 在以 u, u' 作为独立变数时是凸函数，所以对于准确解 $u=\bar{u}$, $2J[u]$ 取最小值，且能应用相反定理。直接利用 Friedrichs 变换(43.1)，(43.3)，就有

$$\left.\begin{aligned}&p=F_{u'}=u',\ p'=F_u=x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}},\\&\Phi=pu'+p'u-F=\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{5}x^{\frac{1}{3}}p'^{\frac{5}{3}}.\end{aligned}\right\}\tag{64.4}$$

在(43.4)中代入 $b_1=0$, $b_0=1$，于是相反泛函就成为

$$2I[p]=-2p(0)-\int_0^\infty\left(p^2+\frac{6}{5}x^{\frac{1}{3}}p'^{\frac{5}{3}}\right)dx.\tag{64.5}$$

这里 $p(x)$ 必須满足 $p'(x)\geqslant 0$. 为了右边的积分存在，当然在 $x\to\infty$ 时必須 $p\to 0$，故 $p(0)<0$. $I[p]$ 的最大値就是 $J[u]$ 的最小値 $J[\bar{u}]$.

因此对于满足(64.2)的任意的 $u\geqslant 0$，与满足 $p'\geqslant 0$ 的任意的 p，恒有

$$2I[p]\leqslant 2J[\bar{u}]\leqslant 2J[u],\tag{64.6}$$

而且容易求出 $J[\bar{u}]$ 的近似值。然而 $J[u]$ 是从变分法导出微分方程时选取的泛函，并不是預先給定的，所以就产生求 $J[\bar{u}]$ 有什么作用的疑問。

可是在这个問題上却有特殊的情况，即 $J[\bar{u}]$ 是与函数 $\bar{u}$ 的一些更重要的量借簡单的关系而联系起来的。这种量中的一个就是 $\bar{u}$ 的初始斜率

$$B_0=-\bar{u}'(0),\tag{64.7}$$

这也可写为

$$B_0=\int_0^\infty\left(\bar{u}'^2+x^{-\frac{1}{2}}\bar{u}^{\frac{5}{2}}\right)dx.\tag{64.8}$$

由于 $u=\bar{u}$ 满足(64.1)，所以被积函数就成为 $\bar{u}'^2+\bar{u}\bar{u}''=(\bar{u}\bar{u}')'$，若再利用(64.2)，就立刻得到(64.8)。

虽然(64.3)与(64.8)相似，但也略有不同。假使(64.1)是綫性的，而右边的 $u^{\frac{3}{2}}$ 换成了 u，则(64.8)将完全与(64.3)一致。实际上，此时的問題就与 §56 的問題完全相同。

由于問題是非綫性的，虽然(64.8)与(64.3)不一致，但另一方面，利用函数 $x^{-\frac{1}{2}}$ 的特殊性，在 B_0 与 $J[\bar{u}]$ 之間，存在着一定关系是可以看出的。为要导出这一关系，可利用常数 $\lambda>0$, 令

$$u_\lambda(x)=\bar{u}(\lambda x) \tag{64.9}$$

来計算 $J[u_\lambda]$. 在这个积分中用 $\lambda x=t$ 来变换变数，則得

$$2J[u_\lambda]=\lambda\int_0^\infty \bar{u}'(t)^2dt+\frac{4}{5}\lambda^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\bar{u}(t)^{\frac{5}{2}}dt. \tag{64.10}$$

由于 $\bar{u}$ 是 J 的最小函数，$\partial J[u_\lambda]/\partial\lambda$ 在 $\lambda=1$ 处应成为 0. 把它写下来，再将 t 换为 x，就得

$$5\int_0^\infty \bar{u}'^2dx=2\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\bar{u}^{\frac{5}{2}}dx. \tag{64.11}$$

可見 (64.8) 的两项的积分之間存在着簡单的关系。于是在 $J[\bar{u}]$ 与 B_0 之間，有

$$\frac{6}{7}B_0=2J[\bar{u}] \tag{64.12}$$

的关系成立，而依(64.6)，B_0 的上下界便能由

$$-2p(0)-\int_0^\infty\left(p^2+\frac{6}{5}x^{\frac{1}{3}}p'^{\frac{5}{3}}\right)dx$$

$$\leqslant\frac{6}{7}B_0\leqslant\int_0^\infty\left(u'^2+\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{5}{2}}\right)dx \tag{64.13}$$

近似地算出。

§65 尺度的变换与齐次化

虽然(64.13)可以在現有的形式下应用，但經过如下变形后就更方便。取任意的函数 $U(x)\geqslant 0$，施行尺度的变换

$$u(x)=U(\lambda x)/U(0) \qquad (\lambda>0), \tag{65.1}$$

于是因 u 满足必要的边界条件，故代入(64.13)就行了。根据推导(64.10)的相同理由，得

$$\frac{6}{7}B_0 \leqslant \frac{\lambda}{U(0)^2}\int_0^\infty U'(x)^2 dx + \frac{4}{5}\ \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{U(0)^{\frac{5}{2}}}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}U(x)^{\frac{5}{2}}dx. \tag{65.2}$$

因为上式对任意的 $\lambda>0$ 都成立，所以在 $\lambda>0$ 的范圍内可取其右边的最小值。結果是

$$B_0 \leqslant 2^{-\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}\cdot 7U(0)^{-\frac{7}{3}}\left(\int_0^\infty U'^2 dx\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}U^{\frac{5}{2}}dx\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{65.3}$$

同样，取任意的函数 $P(x)$（但 $P'(x)>0$），令

$$p(x)=\mu P(\lambda x) \qquad (\lambda>0,\ \mu>0), \tag{65.4}$$

代入(64.13)的左边，得

$$\frac{6}{7}B_0 \geqslant -2\mu P(0) - \frac{\mu^2}{\lambda}\int_0^\infty P(x)^2 dx - \frac{6}{5}\mu^{\frac{5}{3}}\lambda^{\frac{1}{3}}\int_0^\infty x^{\frac{1}{3}}P'(x)^{\frac{5}{3}}dx. \tag{65.5}$$

由于上式对无論什么样的 λ,μ 都成立，所以如果这样确定 λ,μ 使右边成为最大，就得到

$$B_0 \geqslant 2^{\frac{1}{3}}\cdot 5\cdot 7^{-\frac{4}{3}}[-P(0)]^{\frac{7}{3}}\left(\int_0^\infty P^2 dx\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\int_0^\infty x^{\frac{1}{3}}P'^{\frac{5}{3}}dx\right)^{-1}. \tag{65.6}$$

例 在(65.3)中令

$$U(x)=(1+x)^{-2}, \tag{65.7}$$

于是右边可用 B 函数来表示而得

$$B_0 \leqslant 2^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}\cdot 7\cdot B(1,5)^{\frac{1}{3}}B\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.595. \tag{65.8}$$

又在(65.6)中令

$$P(x)=-e^{-\sqrt{x}}, \tag{65.9}$$

则得

$$B_0 \geqslant 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-1}\cdot 5^{2}\cdot 7^{-\frac{4}{3}}=1.568。 \tag{65.10}$$

与所用試驗函数的簡单对比起来，这些上下界是好的。又在(65.7)中，即令将 $(1+x)^{-2}$ 換成 $(1+\lambda x)^{-2}$ 而引进参变数 λ，只要是应用(65.3)，結果仍不变。这是因为象这样的尺度变换已經滲入到(65.3)中去了。关于(65.9)的函数也有同样的情況。

对于現在的問題，綫性試驗函数(§ 57)无能为力。这是因为当U是参数的一次式时，象$\int x^{-\frac{1}{2}}U^{\frac{5}{2}}dx$这样的量，若把参数作为不定的，就不能計算出来。根据这个理由，要精确地求B_0的近似值，比起綫性問題来，困难的程度要大得多。

§ 66 相反定理不成立的場合

再考虑§ 56的問題(即求$u'(a_1)/u(a_1)$)。在那里曾假定了$p(x)>0$, $r(x)>0$，但有許多問題，虽然滿足$r>0$，却不一定滿足$p>0$。在这样的一般情况下，由于$2F=pu^2+ru'^2$在以u, u'作为独立变数时不一定是凸函数，所以对于(56.4)的$J[u]$就不能应用相反定理或 Friedrichs 变換来求上下界。因此求Q的上下界就不象前面那样簡单。

因为无論如何$\bar{u}$总滿足 Euler 方程，所以总有

$$2J[u]-2J[\bar{u}]=2J[\eta],\quad \eta=u-\bar{u}. \tag{66.1}$$

其中η是u的变分，而$J[\eta]$就是J的第二变分。η滿足边界条件

$$\eta(a_0)=\eta(a_1)=0. \tag{66.2}$$

注意到这一点并分部积分，就可有

$$2J[\eta]=\int_{a_0}^{a_1}[-(r\eta')'+p\eta]\eta dx=\int\eta H\eta\,dx. \tag{66.3}$$

一般地記

$$Hv=-(rv')'+pv. \tag{66.4}$$

現在試考虑关于H的如下的固有值問題：

$$H\varphi=\lambda k\varphi. \tag{66.5}$$

这里$k(x)$是确定了的函数,且設$k>0$。对于函数φ要求有与(66.2)相同的边界条件。如§30, §31所述,固有值构成数列$\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ $(\lambda_n\to\infty)$,且可确定相应的固有函数φ_1, φ_2, …,使构成完备的正規正交系:

$$\int \varphi_i\varphi_k\, k\, dx=\delta_{ik}. \tag{66.6}$$

利用这个完备正交系把变分$\eta(x)$展开,就得

$$\eta\sim\sum c_i\varphi_i\,,\quad c_i=\int \varphi_i\,\eta k\, dx. \tag{66.7}$$

同样,設函数$k^{-1}H\eta$的展开为

$$k^{-1}H\eta\sim\sum d_i\varphi_i,\quad d_i=\int \varphi_i\, H\eta\, dx. \tag{66.8}$$

由于φ_i及η都满足边界条件(66.2),故依Green定理与$H\varphi_i=\lambda_i k\varphi_i$,得

$$d_i=\int \eta\, H\,\varphi_i dx=\lambda_i\int \eta\varphi_i k\, dx=\lambda_i c_i. \tag{66.9}$$

更依Parseval公式(31.8),就能得到

$$\left.\begin{aligned}
&\int \eta^2 k\, dx=\sum c_i^2,\\
2J[\eta]=&\int \eta\, H\,\eta\, dx=\sum c_i d_i=\sum \lambda_i c_i^2,\\
&\int (H\eta)^2k^{-1}\, dx=\sum d_i^2=\sum \lambda_i^2 c_i^2.
\end{aligned}\right\} \tag{66.10}$$

設在λ_1, λ_2, …中正的且最小的一个是α,負的且絕对值最小的一个是$-\beta$,則有

$$\left.\begin{aligned}
&\int \eta H\,\eta\, dx=\sum\lambda_i c_i^2=\sum\frac{1}{\lambda_i}\lambda_i^2 c_i^2\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum\lambda_i^2 c_i^2,\\
&\int \eta\, H\,\eta\, dx\geqslant-\frac{1}{\beta}\sum\lambda_i^2 c_i^2.
\end{aligned}\right\} \tag{66.11}$$

令$\sum\lambda_i^2 c_i^2=\varepsilon^2$,則依(66.10)就有

$$\varepsilon^2=\int (H\eta)^2 k^{-1}dx=\int (Lu)^2 k^{-1}dx. \tag{66.12}$$

但算子 L 虽然在形式上和 H 借相同的式子 (66.4) 来定义，不过它可作用于不一定满足边界条件的一般函数。因此有 $H\eta=L\eta=L(u-\bar{u})=Lu$（注意 $L\bar{u}=0$）。依 (66.12)，(66.11) 有

$$-\frac{1}{\beta}\varepsilon^2\leqslant\int\eta H\eta dx\leqslant\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2. \tag{66.13}$$

因此注意到 (66.3)，就可从 (66.1) 得到

$$-\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2\leqslant 2J[\bar{u}]-2J[u]\leqslant\frac{1}{\beta}\varepsilon^2. \tag{66.14}$$

如果已給了試驗函数 u，則 $2J[u]$ 及 ε^2 都是能計算的量。因此，若 α，β 已知，则依 (66.14) 就能求出 $2J[\bar{u}]$ 的上下界。一般說来，准确地求出 α，β 与求 $2J[\bar{u}]$ 是差不多的，或者还要更困难一些。可是若 u 是良好的近似函数，则因 ε^2 很小（实际上若 $\boldsymbol{u}=\bar{u}$，则由 $L\bar{u}=0$，而有 $\varepsilon^2=0$），所以在知道了 α，β 的大略的值以后，上面的公式就可应用。还要注意，由于輔助函数 k 的取法，就是对于同一个 u，也会使 α，β，ε^2 产生差异。

特别是当 $J[\eta]$ 为非負值时（卽在 α_1 的左边沒有 a_0 的共轭点），因为 $\lambda_1\geqslant0$，所以取 $\alpha=\lambda_1$，$\beta=\infty$，就能完满地得到

$$2J[u]-\frac{1}{\lambda_1}\varepsilon^2\leqslant 2J[\bar{u}]\leqslant 2J[u]. \tag{66.15}$$

本节的方法与 §56 依据相反定理而得的方法并非完全沒有关系。当 $p>0$ 时，可以 p 作为 k，这样，依

$$2J[\eta]\geqslant\int p\eta^2 dx \tag{66.16}$$

就有 $\lambda_1\geqslant1$，所以 (66.15) 变成

$$2J[u]-\varepsilon^2\leqslant 2J[\bar{u}]\leqslant 2J[u]. \tag{66.17}$$

另一方面，从 (56.10) 就可以明了，这里的 ε^2 与在 (58.4) 中用了 $\varphi=ru'$ 时的 ε^2 完全一致，因此 (66.17) 当然是从 (56.9) 立刻可推得的結果。

在实际計算中，利用綫性試驗函数使 ε^2 成为最小可决定参数。当这个方法很麻煩时，一般可这样作：形式地将試驗函数代入 $2J[u]$，变动有限个参数来求出它的逗留值，作为 $2J[\bar{u}]$ 的近似值。虽然不能保証用这个方法一定能得出良好的值，但如果在計算时加以适当的注意，則常能得到滿意的結果。其理由是：为了 $J[\bar{u}]$ 是逗留値，$J[u]-J[\bar{u}]$ 就是高阶的微小量，故即令 $u-\bar{u}$ 不是太小，$J[u]-J[\bar{u}]$ 也可以成为充分小。

§67　散射的相

在波的散射理論中常常出現如下的問題。考虑在区間 $0<x<\infty$ 內，滿足微分方程

$$-Lu\equiv u''+[k^2-V(x)]u=0 \quad (k \text{ 是正的常数}) \tag{67.1}$$

与边界条件

$$u(0)=0 \tag{67.2}$$

的函数 $u=\bar{u}(x)$。設“势”函数 $V(x)$ 当 $x\to\infty$ 时充分快地接近于0，則在远处 $\bar{u}(x)$ 就取如下的形式：

$$\bar{u}(x)\sim A\sin(kx+\bar{\delta}). \tag{67.3}$$

$\bar{\delta}$ 称为散射的相，是决定散射現象的一个很重要的量。

要計算 $\bar{\delta}$ 可应用变分法。为此，导入泛函

$$2J[u]=\int_0^\infty u\,Lu\,dx+k\,\omega, \tag{67.4}$$

但作为可取的函数 u，除应滿足边界条件(67.2)之外，还应在 $x\to\infty$ 时，具有如下的漸近形式：

$$u(x)\sim\cos kx+\omega\sin kx. \tag{67.5}$$

取这里的系数 ω 作为(67.4)的 ω。对于这样的 u，因为当 $x\to\infty$ 时，有 $Lu\sim Vu$，所以(67.4)的积分是存在的。

准确解 $u=\bar{u}$ 是(67.4)的逗留函数。实际上，在

$$2\delta J[u] = \int \delta u\, L\, u\, dx + \int u\, L\, \delta u\, dx + k\,\delta\omega \qquad (67.6)$$

中注意到

$$\int_0^\infty (u\,L\,\delta u - \delta u\,Lu)\,dx = \lim_{x\to\infty} (u'\,\delta u - u\,\delta u') = -k\delta\omega, \quad (67.7)$$

就得

$$2\delta J[u] = 2\int_0^\infty \delta u\, L\, u\, dx, \qquad (67.8)$$

若令 $u=\bar{u}$，则由于 $L\bar{u}=0$，右边就成为0。

求逗留值时，仍由 $L\bar{u}=0$ 而得

$$2J[\bar{u}] = k\bar{\omega} = k\cot\delta. \qquad (67.9)$$

因为 $\bar{\omega}$ 是把准确解 $u=\bar{u}$ 的漸近形式写成(67.5)形式时的 ω 的值，所以只要与 (67.3) 相比較就立刻会知道它等于 $\cot\delta$。这样，逗留值 $J[\bar{u}]$就直接表示了一个重要的物理量。

§ 68 散射的相的估值

依(67.9)，求 δ 的工作虽已归結到求 $J[\bar{u}]$的工作，但这里的泛函 $J[u]$ 与前見的泛函是不同的，被积函数包含 $-uu''$ 这样的項。无論如何 $J[u]$ 决不是凸泛函，相反定理不成立。

可是利用与 § 66 相类似的方法，可以求出 $J[\bar{u}]$的上下界。計算 J 的全变分，就知道有

$$2J[u] - 2J[\bar{u}] = \int_0^\infty \eta\, L\, \eta\, dx, \quad \eta = u - \bar{u}, \qquad (68.1)$$

在这里使用了与 (67.7) 同样的計算。为要估計 (68.1) 的右边的量，可用与 § 66 完全同样的方法。

确定輔助函数 $\rho>0$，而考虑形式上与(66.5)完全相同的固有值問題(为了与波数 k 有所区别，这里用 ρ 代替 § 66 的 k)。不过在这里算子 H 虽然与 L 相同，但設它仅作用于满足齐次边界条件

$$v(0)=0;\ x\to\infty \text{ 时}, v\sim A\sin kx \qquad (68.2)$$

的函数。如果 $\rho(x)$ 是在远处充分快地趋近于0的函数，则可証明 H 的固有值构成数列

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots. \tag{68.3}$$

和 §66 的場合不同，这个数列一般是向左右两方延伸的。設相应的固有函数系为 $\varphi_i(i=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，则正交性，展开定理，Parseval 等式等均照样成立。变分 $\eta=u-\bar{u}=(\omega-\bar{\omega})\sin kx$ 满足边界条件(68.2)，因此，注意到 $L\eta=H\eta$，则(66.6)以下的式子都照样成立，而且得到 (66.14) 作为 $2J[\bar{u}]=k\cot\bar{\delta}$ 所满足的不等式。即

$$-\frac{1}{\alpha}\varepsilon^2\leqslant k\cot\bar{\delta}-2J[u]\leqslant\frac{1}{\beta}\varepsilon^2, \tag{68.4}$$

$$\varepsilon^2=\int_0^\infty (Lu)^2\rho^{-1}dx. \tag{68.5}$$

至于实际的計算，相应地要有与前节同样的补充説明。

§69 固有值問題的 Rayleigh-Ritz 方法

最后試用变分法来处理固有值問題本身。为簡单起見，考慮 §30 的問題，固有值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 就是泛函 $J[u]/K[u]$ 的逗留值，特别是 λ_1 等于它的最小值。此时仅从逗留值不止一个这一点就会明了相反定理是不成立的(这最后是由于 $K[u]$ 不为一次的)。

因为无論怎样 λ_1 总是最小值，所以采用可取的任意函数 u，恒有

$$\lambda_1\leqslant\frac{J[u]}{K[u]}. \tag{69.1}$$

这有时称为 **Rayleigh 原理**。取含有适当参数的函数作为 u，使(69.1)的右边成为最小，就可以相信它将給出 λ_1 的良好近似值，这与上述各节是相同的。

特别，利用綫性試驗函数来作就更便利，这样做还有一个好处，

那就是其他固有值 λ_2, λ_3, $\cdots$ 的上界也能同时求出。即决定了"基底函数" u_1, $\cdots$, u_n, 利用参数 ξ_1, $\cdots$, ξ_n, 令

$$u=\xi_1 u_1+\cdots+\xi_n u_n, \tag{69.2}$$

代入 (69.1) 的右边,就得到 n 个变数 ξ_1, $\cdots$, ξ_n 的两个二次形式的比

$$\frac{\sum a_{ik}\xi_i\xi_k}{\sum b_{ik}\xi_i\xi_k}, \tag{69.3}$$

且分母是正定的。因为这个函数与(5.1)具有完全相同的形式,所以就产生了相应的固有值問題

$$\sum(a_{ik}-\lambda' b_{ik})\xi_k=0, \tag{69.4}$$

而且固有值

$$\lambda_1'\leqslant\lambda_2'\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n' \tag{69.5}$$

是确定的。对此,恒有

$$\lambda_i\leqslant\lambda_i' \qquad (i=1,\ \cdots,\ n). \tag{69.6}$$

这一关系利用固有值的最大-最小性(§ 6)就能立刻証明。将(69.1)与(69.3)比較,可知(69.3)就是把(69.2)的 u 代入(69.1)以后所得的結果,也就是把泛函(69.1)的变域加以限制后的結果。因此对两者附加相同的約束时,它們的最小值中,(69.3)的最小值可能小些,从而关于最小值的最大值,即固有值,也可以說有同样的結果。

解(69.4)而求 λ_i 的近似值 λ_i' 的方法,称为 **Rayleigh-Ritz 方法**。与上面同样可以相信,若参数的数目 n 增大,則 λ_i' 就成为 λ_i 的良好近似。关于实际的应用例子請参看其他书籍。

§ 70 固有值的上下界

就 Rayleigh-Ritz 方法来說,虽然能求得固有值的上界,但却不能求得下界。即使如此,要求固有值 λ_n 的上界,至少还必須准

确地解出 n 維固有値問題，而当 n 很大时，这就不是容易的事。因此就希望有另外的方法来求固有值的上下界。为方便計，以下就有限維矢量的固有値問題(§5)导出上下界公式，这些結果对于任意的固有値問題也都成立。

取"試驗矢量" $\boldsymbol{u}$，把它看成是第 i 个固有矢量 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ 的近似矢量，計算

$$\left.\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) &= \frac{(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})}, \\ \varepsilon^2 &= \frac{(\boldsymbol{v}, B^{-1}\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})}, \qquad \boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u} - J(\boldsymbol{u})B\boldsymbol{u}. \end{aligned}\right\} \tag{70.1}$$

若准确地有 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(i)}$，则必 $J(\boldsymbol{u}) = \lambda_i$，$\boldsymbol{v} = 0$，$\varepsilon^2 = 0$，因此 ε^2 可看做是很小的数。因为

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}, B^{-1}\boldsymbol{v}) &= (A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u}) - 2J(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) + J(\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}) \\ &= (A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}), \end{aligned} \tag{70.2}$$

所以 ε^2 又能表示成

$$\varepsilon^2 = \frac{(A\boldsymbol{u}, B^{-1}A\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u})} - J(\boldsymbol{u})^2. \tag{70.3}$$

用固有函数 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 将 $\boldsymbol{u}$ 展开，設为

$$\boldsymbol{u} = \sum \xi_k \boldsymbol{u}^{(k)}, \tag{70.4}$$

于是根据 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 的正交性(6.2)，从(70.1)，(70.3)就得到

$$\left.\begin{aligned} J(\boldsymbol{u}) &= \frac{\sum \lambda_k \xi_k^2}{\sum \xi_k^2}, \\ \varepsilon^2 + J(\boldsymbol{u})^2 &= \frac{\sum \lambda_k^2 \xi_k^2}{\sum \xi_k^2}. \end{aligned}\right\} \tag{70.5}$$

在这里用到了 $(A\boldsymbol{u}^{(j)}, B^{-1}A\boldsymbol{u}^{(k)}) = \lambda_j\lambda_k(B\boldsymbol{u}^{(j)}, \boldsymbol{u}^{(k)}) = \lambda_j^2\delta_{jk}$.

可是由于 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，所以对于所有的 $k = 1, 2, \cdots, n$，

$$\lambda_k^2 - (\lambda_{i-1} + \lambda_i)\lambda_k + \lambda_{i-1}\lambda_i = (\lambda_k - \lambda_{i-1})(\lambda_k - \lambda_i) \geqslant 0. \tag{70.6}$$

用 ξ_k^2 乘上式并就 k 相加，則有

$$\sum \lambda_k^2 \xi_k^2 - (\lambda_{i-1}+\lambda_i)\sum \lambda_k \xi_k^2 + \lambda_{i-1}\lambda_i \sum \xi_k^2 \geqslant 0. \tag{70.7}$$

用 $\sum \xi_k^2$ 除上式，并将(70.5)代入，则得

$$\varepsilon^2 + (J(\boldsymbol{u}) - \lambda_{i-1})(J(\boldsymbol{u}) - \lambda_i) \geqslant 0. \tag{70.8}$$

若 $J(\boldsymbol{u})$ 是 λ_i 的精确近似值，且設 λ_i 并不是縮重的，则

$$\lambda_{i-1} < J(\boldsymbol{u}) < \lambda_{i+1}. \tag{70.9}$$

以下都作这样的假定，从(70.8)得

$$\lambda_i - J(\boldsymbol{u}) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{J(\boldsymbol{u}) - \lambda_{i-1}}. \tag{70.10}$$

完全同样地可得

$$\lambda_i - J(\boldsymbol{u}) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\lambda_{i+1} - J(\boldsymbol{u})}. \tag{70.11}$$

以上两个式子分别給出了 λ_i 的上界和下界。因为这些式子的右边分别含有 λ_{i-1}，λ_{i+1}，所以为了求 λ_i 的近似值，似乎必須要知道 $\lambda_{i\pm1}$，但当 ε^2 很小时，只要知道 $\lambda_{i\pm1}$ 的大略的值，就能求得 λ_i 的精确值，而且可以得到很好的結果。

习　　题

1．証明 § 56 的 Q^{-1} 是滿足边界条件 $u(a_0)=0$ 的

$$2J'[u] = -\int_{a_0}^{a_1} (pu^2 + ru'^2)\,dx + 2u(a_1)$$

的最大值。将它齐次化，从而証明(57.1)的最小值等于 Q。

2．直接証明在 § 57 中恒有 $2I_1[\varphi] \leqslant 2J_1[u]$（仿照(59.14)，并利用 Schwarz 不等式）。

3．試将(57.4)那样形式的 u 代入(56.4)的 $2J[u]$ 中求 Q 的上界(注意边界条件 $u(a)=1$)。

4．在 § 59 电导率問題(图 59.1)中，設 G 是軸对称的，边界 B 是将曲綫 $y=f(x)>0$ 繞 x 軸旋轉而得的面，Γ_0，Γ_1 分别是平面 $x=a_0$，$x=a_1$ 与 G 的截口。电导率 $\varepsilon(x)$ 仅是 x 的函数。試用 § 59～§ 61 的方法处理这个問題。特别，采用 $x=$ 常数作为等势面，以曲綫束 $y=\alpha f(x)(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 作为“电流綫”，对于 Γ_0，Γ_1 之間的电阻 R，試导出如次的不等式：

$$\int\frac{dx}{\varepsilon f^2}\leqslant\pi R\leqslant\frac{\displaystyle\int\frac{f'^2}{\varepsilon f^2}\,dx}{\log\left[1+\dfrac{\displaystyle\int\frac{f'^2}{\varepsilon f^2}\,dx}{\displaystyle\int\frac{dx}{\varepsilon f^2}}\right]}$$

(积分都是取在(a_0, a_1)上)。并注意这个估計当f'/f不太大时是精确的。从上式更导出

$$\pi R\leqslant\int\frac{1+\frac{1}{2}f'^2}{\varepsilon f^2}\,dx.$$

5．在§63的例中,引入滿足关系

$$\psi=(a^2-x^2)(a^2-y^2)[1+\alpha(x^2+y^2)]$$

的参数α来改良上界,并利用

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}+\beta\,\mathrm{grad}(x^4-6x^2y^2+y^4),\quad(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=2)$$

来改良下界。

6．取任意的函数$\varphi(x, y)$，并在(63.14)中令$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}+(\varphi_y-\varphi_x)$，則$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=2$滿足。由此試导出不等式

$$\mu^{-1}P\leqslant\int_G(x^2+y^2)\,dx\,dy-\frac{\left(\displaystyle\int_\Gamma(x^2+y^2)\,d\varphi\right)^2}{4\displaystyle\int_G(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dxdy},$$

但設G为单連通的。

7．把§64的理論推广到在(64.1)中用x^k代换$x^{-\frac{1}{2}}$的場合。

8．在§67中，散射的相$\bar\delta$是k的函数，而$k\to0$时，$k\cot\bar\delta$具有极限$\bar\gamma$。說明为要导出$\bar\gamma$的近似值公式，只要在(68.4)中將$k\cot\bar\delta$写成$\bar\gamma$，而对于其他的項令$k=0$就可以了。但在确定α，β的固有値問題中，$x\to\infty$的边界条件,不用(68.2)而取　$v(x)=(\text{常数})x+o(1)$　的形式。証明如果$v(x)>0$，令$\rho(x)=v(x)$，則所有的固有値都不比1小,且有$\alpha\geqslant1$，$\beta=\infty$．由此导出

$$\gamma+\int_0^\infty(-u''+Vu)u''\frac{dx}{V}\leqslant\bar\gamma\leqslant\gamma+\int_0^\infty(-u''+Vu)u\,dx.$$

但u是滿足$u(0)=0$且在$x\to\infty$时充分快地具有漸近形式$u\sim1+\gamma x$的任意函数。又試行直接証明上述結果。并說明对于这样的函数,次式成立:

$$-\int_0^\infty uu''dx=\int_0^\infty\left(u'-\frac{u}{x}\right)^2dx+\gamma.$$

9．当$V(x)=e^{-x}$时,試依上述公式計算$\bar\gamma$的近似值。

参 考 文 献

从比较广泛的观点介紹变分法的各个方面及其应用的教科书，首先必須举出

R. Courant–D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, I, II. (J. Springer, Berlin, 1932, 1937)❶ I 的第 4 章正是讲的变分法，而这本书的大部分都貫穿着变分法的思想。此外，作为合适的教科书有

Н. И. Ахиезер: Лекции по Вариационному Исчислению (Москва, 1955).

古典变分学的参考书很多，兹仅举其中著名的于下：

M. Moigno–L. L. Lindelöf: Calcul des variations (Mallet Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris, 1861).

A. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung (Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig, 1900).

O. Bolza: Lectures on the calculus of variations (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1904).

O. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung (B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1909).

J. Hadamard: Leçons sur le calcul des variations (A. Hermann at Fils, Paris, 1910).

L. Tonelli: Fondamenti di calcolo delle variationi, I, II (Nicola Zanichelli, Bologna, 1921, 1923).

G. A. Bliss: Calculus of Variations (Open Court, Chicago, 1924).

C. Carathéodory: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1935).

关于大范圍的变分学书籍可举

M. Morse: Calculus of variations in the large (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1934).

本书也收集了許多古典变分学的結果。扼要地介紹 Morse 理論的較好的书有

❶ 有中譯本：数学物理方法，錢敏等譯，科学出版社，I，1958.

H. Seifert–W. Threlfall: Variationsrechnung im Grossen (B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1938).

关于变分法的近似解法，适当的参考书是出乎意外的少，作者接触过的有

G. Pólya–G. Szegö: Isoperimetric inequalities in mathematical physics (Annals of Math. Studies, Princeton, 1951).

S. Bergman–M. Schiffer: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics (Academy Press, New York, 1953).

Л. В. Канторович–В. И. Крылов: Приближенные Методы Высшего Анализа (Москва–Ленинград, 1952).

希望知道变分法在物理学方面应用的最新发展的讀者可参看

日本物理学会編，物理学論文选集 53（应用数学 III，变分法）。

关于讲述物理学变分原理的参考书，根据本书序言中所說的理由而省略了，請参看分析力学，相对論等方面的书籍。日文的变分法书籍可举

寺澤寛一：为自然科学工作者所写的数学概論（岩波，1954），第9章。

平野次郎：变分法序說，級数展开法（东海，1946）。

小松勇作：变分学（东海，1947）。

南云道夫：变分学（朝仓，1951）。

校 后 記

金 福 临

变分学是差不多和数学分析同时发展起来的古老的数学分支之一，主要研究泛函(函数的函数)的极値問題。近三十年来，泛函分析理論有了很大的发展，不論在数学的理論上或是在应用方面皆显示重要的作用，而变分学就是泛函分析的一个重要組成部分。

变分学的发展緊密联系于它在力学、物理、工程以及經济建設各方面的广泛应用。变分法理論虽然已相当广泛，但是还不能滿足各方面对它日益增长的需要，不断地提出新的問題。例如，在对自动調整理論中的最佳过程問題的研究中，1956～1960 苏联学者 Л. С. Понтрягин 提出了最大原理，研究了函数值范圍受限制的情形，扩展了古典变分理論。另一方面，近十几年来，R. Bellman 所发展的动态規划理論，也研究了不属于古典变分学范圍的极値問題，所得到的最优性原理，在許多方面显示出它的作用，目前已逐步看出它和 Л. С. Понтрягин 的理論之間的联系。此外，象宇宙航行理論中的軌道設計和計算方面也經常提出新的变分問題。可以相信，今后也一定不断会有新的課題涌現。

近代处理极値問題的解的各种方法也有很大的发展。有些方法称为直接方法，是以直接从求极値的积分形式出发，避免采用微分方程，借助于一些极限运算，求出极値函数本身或者它的近似。对直接方法的理論基础，也有較深入的研究。

日本数学家加藤敏夫著的变分法一书，是一本具有較高水平的著作。作者以簡练的方法，介紹了变分学的基本理論和它的主要应用，对于数学基础較好的讀者来說，通过这本书可以較快地掌握变分学理論的几个方面的主要思想与方法，而打下一定的理論

基础。

全书共分六章，前面五章涉及变分学的最基础部分，包括变分問題的提出、变分学的基本方程、固有值問題、极值的必要与充分条件，Hamilton-Jacobi 理論。正如作者所指出的，理論的介紹幷不拘泥于数学的严密性，但还是中肯扼要的，这样就可使讀者对古典变分学的基本理論得到相当清晰的印象。最后一章討論变分法在近似計算中的应用，泛函逗留值的上下界問題以及在某些数学物理問題中的应用。本书不同于一般的处理这一問題的书的地方在于它不止考虑逗留函数問題，而对于逗留值的近似計算特别是两側估計作了較多的討論。对 Friedrichs 变換作者也从实用方面作了介紹；同时所討論的是一般的凸泛函。虽然从近似計算的角度来看，象近似序列的收斂性，試驗函数如何选取較好等問題沒有触及，好象不够詳尽，但作为变分学的应用来看是有参考价值的。原书各章还附有习題，可供参考。

閱讀本书除需要数学分析、物理、力学、微分方程的基础知識而外，还需要一些数学物理方程和固有值問題的基本知識，这些內容在有关的教科书中是可以找到的。

原书附有参考书目录，根据近几年出版的情况，还可以作一些补充，这些书都是苏联学者編著而有中譯本的。

可作为教科书或教学参考书的有

Л. Э. Эльсгольц, 变分学，1958.

М. А. Лаврентьев 和 Л. А. Люстерник, 变分学教程，1950.

В. И. Смирнов, 高等数学教程，第四卷第一分册，1953.

关于变分法在近似計算中的应用方面还可参考

С. Г. Михлин, 数学物理中的直接方法，1950 或数学物理中的变分方法，1957.

С. Л. Соболев, 泛函分析在数学物理中的应用，1950.